

。定数係数系方程式の場合、[1]~[3]は

微分演算子 $D = \frac{d}{dx}$ を利用して形式的に計算する法もある。

$$x' = \frac{d}{dx} x = Dx, \quad y' = \frac{d}{dx} y = Dy$$

↑
※ x は xy の x だけ

$$(D+3)x = Dx + 3x = x' + 3x$$

$$(D^2 - 5D + 6)x = D^2x - 5Dx + 6x = x'' - 5x' + 6x$$

9. 以下の見出しに注意。 ($D^2x = D(Dx) = Dx' = x''$)

$$\begin{cases} x' + y' - 6x = e^x \\ y' - 5x + 2y = e^x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Dx + Dy - 6x = e^x \\ Dy - 5x + 2y = e^x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (D-6)x + Dy = e^x & \text{--- (P)} \\ -5x + (D-2)y = e^x & \text{--- (Q)} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (D+2) \times (P) & \dots (D+2)(D-6)x + (D+2)Dy = (D+2)e^x \\ D \times (Q) & \dots D(-5x) + D(D+2)y = De^x \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} \text{---} \\ (D^2 - 4D - 12 + 5D)x = 2e^x \\ D^2 + D - 12 \end{array}$$

$$\therefore x'' + x - 12x = 2e^x$$

ただし、この"2"は x に対して

$$\circ (D+2)(D-6)x = (D^2 - 4D - 12)x \quad (\text{展開})$$

$$\circ (D+2)Dy = D(D+2)y \quad (\text{交換})$$

かゝい x の x だけ

9. 一般に、定数 a, b に対して

$$\begin{aligned} (D+a)(D+b)f &= (D+b)(D+a)f \\ &= \{D^2 + (a+b)D + ab\}f \end{aligned}$$

$$\textcircled{=} (D+a)(D+b)f = (D+a)(D+b)f$$

(元々はこういう意味)

$$= (D+a)(f' + bf)$$

$$= D(f' + bf) + a(f' + bf)$$

$$= (f' + bf)' + a(f' + bf)$$

$$= f'' + bf' + af' + abf$$

$$= \{D^2 + (a+b)D + ab\}f$$

$$(D+b)(D+a)f = \text{〃} \quad \text{も同様}$$

9. 一般に定数係数多項式 $F(x), G(x)$ に対して

$$H(x) = F(x)G(x) \text{ とする}$$

$$\underline{F(D)G(D)f = G(D)F(D)f = H(D)f}$$

5.2 定数係数系方程式 の形式的に

微分を D で置きかえた代数演算が可能になる
($\rightarrow$ 演算子法)