

⑨ 命題 12

1. 高階 (単独, 2階連立) の方程式は

未知函数
の方程式の数

を増やして, 1階連立微分方程式にできる

2. 正規形の場合, 互逆の変形も可能:

1階連立 (n本) $\xrightarrow{(n-1) \text{ 個の未知函数を消去}} n \text{ 階単独}$

(n-1) 個の未知函数を消去

3. 1階 正規形連立 (n本) の一般解は n 個の任意定数をもつ。

⑩ (1階) 正規形連立の方程式:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \vdots \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases}$$

① $y_1, y_2, \dots, y_n$ の 1 階微分係数 = 方程式に $y_1, y_2, \dots, y_n$ の存在に注意
② 3 方程式の数 = 未知函数の数

③ $f_1, \dots, f_n$ が $n+2$ 変数 $x, y_1, \dots, y_n$ の関数 $\Rightarrow$ 系統可

正規形の場合

n 階単独 $\longleftrightarrow$ n 本 1 階連立 (系統可)

⑪ 連立の方程式の解法の手順: (13頁, n=3)

[1] まず 1 階 正規形に直す。

$$\begin{cases} x' = f_1(x, y, z) \rightarrow ① \\ y' = f_2(x, y, z) \rightarrow ② \\ z' = f_3(x, y, z) \rightarrow ③ \end{cases}$$

[2] ① を使って ②, ③ に代入

$$\rightarrow x'' = g_1(x, y, z) \rightarrow ④$$

[2] ② に対して [2] を行う (n=3 $\Rightarrow$ x''' を導き出す)

$$\rightarrow x''' = g_2(x, y, z, x', x'', y, z) \rightarrow ⑤$$

[3] ①, ④, ⑤ の 3 本の方程式から y, z を消去

(13頁参照) ①, ④ を y, z の連立の方程式とみる
(y, z を x, x, x', x'' で表わす) ⑤ に代入する

$$\rightarrow x''' = g_3(x, x, x', x'') \rightarrow ⑥$$

(x の単独の方程式 (3階))

[4] ⑥ を解く $\Rightarrow x = x(t)$ が求まる

[5] $x = x(t)$ を, ①, ④ に代入して, y, z を求める

(24頁 ⑤) $\rightarrow y, z$ の連立の方程式
②, ③ に代入して

[4] $\Rightarrow$ 任意定数 3つ (C_1, C_2, C_3)

$\Rightarrow x, y, z$ の任意定数は 3つ (= n)