

① 高階線形、非斉次の定数変化法

$n=2$ で説明する。

$$(IH) y'' + f_1 y' + f_0 y = g$$

$$(H) y'' + f_1 y' + f_0 y = 0$$

とし、 $\{\phi, \psi\}$ を (H) の基本解系とすると

$$y = C_1 \phi + C_2 \psi \text{ は } (H) \text{ の一般解 (定理4)}$$

$\Downarrow$
定数変化法

$$y = u\phi + v\psi \text{ とし } (IH) \text{ の解を求めよ。}$$

未知函数

(注) 未知数 u, v の 2 つの式を求めよには 2 本の式が必要

$$\{ (IH) \text{ に代入した式} \rightarrow (2)$$

$\}$ 。都合の悪いものを 1 本追加する。 $\rightarrow (1)$

未知函数の微分の工数

$$y = u\phi + v\psi \rightarrow (1)$$

$$y' = (u\phi)' + (v\psi)' = \underbrace{[u'\phi + v'\psi]}_0 + u\phi' + v\psi'$$

$$= u\phi' + v\psi' \rightarrow (2) \text{ とし } (1) \text{ とする}$$

$$y'' = (u\phi')' + (v\psi)'$$

$$= (u'\phi' + u\phi'') + (v'\psi' + v\psi'') \rightarrow (3)$$

①, ②, ③ を (IH) に代入

$$y'' + f_1 y' + f_0 y = g$$

$$\begin{aligned} &= u'\phi' + v'\psi' + u(\phi'' + f_1\phi' + f_0\phi) \\ &\quad + v(\psi'' + f_1\psi' + f_0\psi) \quad (\psi \text{ は } (H) \text{ の解}) \\ &= u'\phi' + v'\psi' \\ &= g \quad (2) \end{aligned}$$

$$\text{よって } \begin{cases} u'\phi + v'\psi = 0 & (1) \text{ の連立方程式} \\ u'\phi' + v'\psi' = g & (2) \end{cases}$$

から u', v' を求めよ $(\phi, \psi, g$ は既知)

これを積分すれば u, v が求まる

$$\rightarrow (1) \text{ より } y = u\phi + v\psi \text{ が求まる}$$

$$(1) (2) \text{ は } \begin{bmatrix} \phi & \psi \\ \phi' & \psi' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ g \end{bmatrix} \text{ とし } \phi, \psi \text{ が基本解系}$$

とすれば

$$|\phi \ \psi| = W(\phi, \psi) \neq 0 \text{ (命題5)} \text{ とする}$$

とすると u', v' が求まる。一般化すると次のようになる。

定理10 (H) の n 個の基本解系 $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n\}$ に対し

$$\begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \dots & \phi_n \\ \phi_1' & \phi_2' & \dots & \phi_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_1^{(n-1)} & \phi_2^{(n-1)} & \dots & \phi_n^{(n-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \\ \vdots \\ u_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g \end{bmatrix}$$

を満たす $u_1, \dots, u_n$ により

$$y = u_1\phi_1 + \dots + u_n\phi_n \text{ は } (IH) \text{ の } n \text{ 個の解となる}$$