

命題11

1. 高階(単独, 連立)方程式は

- 未知函数
- 方程式の数

を増やして, 1階連立微分方程式にできる

2. 正規形の場合, その逆の変形も可能:

1階連立(n本) $\xrightarrow{(n-1) \text{ 個の未知函数を消去}}$ n階単独

3. 1階正規形連立(n本)の一般解はn個の任意定数をもつ。

1階正規形連立方程式:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ y_2' = f_2(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \vdots \\ y_n' = f_n(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases}$$

- ① t と $y_1, y_2, \dots, y_n$ の1階微分 = の式に $y_1, y_2, \dots, y_n$ の右側に係数分が含まれない
- ② 方程式の数 = 未知函数の数

f_j が $t, y_1, \dots, y_n$ の1次式 $\Rightarrow$ 線形系

正規形ならば

n階単独 $\longleftrightarrow$ n本1階連立 (線形系)

連立3方程式の解法の手順: (例: n=3)

[1] まず1階正規形に直す。

$$\begin{cases} x' = f_1(t, x, y, z) \rightarrow ① \\ y' = f_2(t, x, y, z) \rightarrow ② \\ z' = f_3(t, x, y, z) \rightarrow ③ \end{cases}$$

[2]₁ ①をゼンとして y, z に出る y', z' に ②, ③を代入 $\rightarrow x'' = g_1(t, x, x', y, z) \rightarrow ④$

[2]₂ ④に対して [2]₁ を行う (n>3 $\Rightarrow$ $x^{(n)}$ まで繰り返す) $\rightarrow x''' = g_2(t, x, x', x'', y, z) \rightarrow ⑤$

[3] ①, ④, ⑤の3本の式から y, z を消去 (例: ①, ④を y, z の連立3方程式とみ y, z を t, x, x', x'' とあらわして ⑤に代入する) $\rightarrow x''' = g_3(t, x, x', x'') \rightarrow ⑥$

(xの単独の方程式 (3階))

[4] ⑥を解く $\Rightarrow x = x(t)$ が求まる

[5] $x = x(t)$ を ①, ④に代入して, y, z を求める (②, ③) $\swarrow$ y, z の2階の方程式 $\rightarrow$ ②, ③に代入して y, z !

[4] $\Rightarrow$ 任意定数3つ (c_1, c_2, c_3)

$\Rightarrow x, y, z$ の任意定数は3つ (= n)