

⑨ 高階線形、非斉次の定数変化法
 $n=2$ を説明する。

$$\begin{aligned}
 (IH) \quad y'' + f_1 y' + f_0 y &= g \\
 (H) \quad y'' + f_1 y' + f_0 y &= 0 \\
 \text{とし、} \{ \phi, \psi \} &\text{を (H) の基本解系とすると} \\
 y &= C_1 \phi + C_2 \psi \text{ は (H) の一般解 (定理 4)} \\
 &\quad \downarrow \leftarrow \text{定数変化法} \\
 y &= u\phi + v\psi \text{ とし (IH) の解を求める。} \\
 &\quad \uparrow \text{未知函数}
 \end{aligned}$$

(注) 未知なものは u, v の 2 つなので決めるには 2 本の式が必要。
 都合のいいものを 1 本追加する。 $\rightarrow (1)$

$$\begin{aligned}
 y &= u\phi + v\psi \rightarrow \text{未知函数の微分の工数} \\
 y' &= (u\phi)' + (v\psi)' = \underbrace{[u'\phi + v'\psi]}_0 + u\phi' + v\psi' \\
 &= u\phi' + v\psi' \quad \text{②} \text{ としたものを (1) とする} \\
 y'' &= (u\phi')' + (v\psi')' \\
 &= (u'\phi' + u\phi'') + (v'\psi' + v\psi'') \quad \text{③}
 \end{aligned}$$

①, ②, ③ を (IH) に代入
 $y'' + f_1 y' + f_0 y$

$$\begin{aligned}
 &= u'(\phi' + \psi'\psi) + u(\phi'' + f_1\phi' + f_0\phi) \\
 &\quad + v(\psi'' + f_1\psi' + f_0\psi) \quad (\psi \text{ は (H) の解}) \\
 &= u'(\phi' + \psi'\psi) \\
 &= g \quad \text{--- (2)}
 \end{aligned}$$

より $\begin{cases} u'\phi + v'\psi = 0 & \text{--- (1) の連立方程式} \\ u'\phi' + v'\psi' = g & \text{--- (2)} \end{cases}$
 から u', v' を求めよ $(\phi, \psi, g$ は既知)
 これを積分すれば u, v が求まる
 $\rightarrow$ ①より $y = u\phi + v\psi$ が求まる。

(1) (2) は $\begin{bmatrix} \phi & \psi \\ \phi' & \psi' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ g \end{bmatrix}$ とする、 ϕ, ψ が基本解系
 ならば

$|\phi \ \psi| = W(\phi, \psi) \neq 0$ (命題 5) とする。
 ちゃんとした u', v' が求まる。一般化すると次のようになる。

定理 9 (H) の v と w の基本解系 $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n\}$ に対し

$$\begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \dots & \phi_n \\ \phi_1' & \phi_2' & \dots & \phi_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_1^{(n-1)} & \phi_2^{(n-1)} & \dots & \phi_n^{(n-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \\ \vdots \\ u_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g \end{bmatrix}$$
 を満たす $u_1, \dots, u_n$ により

$y = u_1\phi_1 + \dots + u_n\phi_n$ は (IH) の v と w の解となる。