

オイラーの公式と指数法則

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad \text{--- ①}$$

• 根拠のふたつ

①. 指数法則. $e^{ix} e^{iy} = e^{i(x+y)}$ --- ②

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \text{ 左辺} &= (\cos x + i \sin x)(\cos y + i \sin y) \\ &= (\cos x \cos y - \sin x \sin y) \\ &\quad + i(\cos x \sin y + \sin x \cos y) \\ &= \cos(x+y) + i \sin(x+y) = \text{右辺} // \end{aligned}$$

②. テイラー展開

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad \text{--- ③}$$

③のxを(形式的に) ix とすると

$$\begin{aligned} e^{ix} &= 1 + \frac{ix}{1!} + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \dots \\ &= 1 + \frac{ix}{1!} - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} - \frac{ix^6}{6!} + \dots \\ &= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots\right) + i\left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots\right) \\ &\quad \uparrow \cos x \text{ のテイラー展開} \quad \uparrow \sin x \text{ のテイラー展開} \\ &= \cos x + i \sin x \end{aligned}$$

• 指数法則 (α, β : 複素数, x : 実数変数)

$$(1) e^{\alpha} e^{\beta} = e^{\alpha+\beta} \quad (2) \frac{e^{\alpha}}{e^{\beta}} = e^{\alpha-\beta}$$

$$(3) (e^{\alpha x})' = \alpha e^{\alpha x}$$

$$(4) \int e^{\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x} + C \quad (\alpha \neq 0 \text{ と 定})$$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} (1) \quad \alpha &= p+qi, \beta = r+si \text{ と すると} \\ \text{左辺} &= e^{p+qi} e^{r+si} = e^p e^{qi} e^r e^{si} \quad (\text{定義}) \\ &= (e^p e^r) (e^{qi} e^{si}) = e^{p+r} e^{(q+s)i} \quad (\text{②より}) \\ &= e^{(p+r) + (q+s)i} = e^{\alpha+\beta} = \text{右辺.} \end{aligned}$$

(2) 両辺 e^{β} をかけると (1) より 明らか

(3) $\alpha = p+qi$ と すると

$$\begin{aligned} e^{\alpha x} &= e^{px+qxi} = e^{px} e^{qxi} = e^{px} (\cos qx + i \sin qx) \\ \text{右辺} (e^{\alpha x})' &= (e^{px})' (\cos qx + i \sin qx) + e^{px} (-q \sin qx + i q \cos qx) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= p e^{px} (\cos qx + i \sin qx) + e^{px} (-q \sin qx + i q \cos qx) \\ &= e^{px} \{ (p+qi) \cos qx + (p-iq) \sin qx \} \\ &= e^{px} (p+qi) (\cos qx + i \sin qx) = \alpha e^{\alpha x} \end{aligned}$$

(4) (3) より O.K. //