（参考） 後でポテンシャルの計算法を別に紹介するが，

$$① \quad \Phi = -\int_{P_0}^{P} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} \qquad (P54\ L4)$$

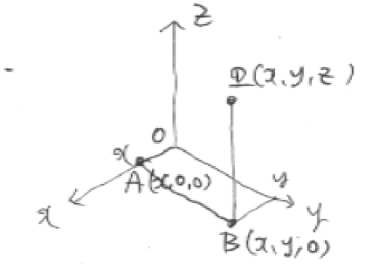
を用いても求めることができる。その計算例を紹介する。

<u>例</u>　$\mathbf{A} = (6xy + z^3,\ 3x^2 - z,\ 3xz^2 - y)$

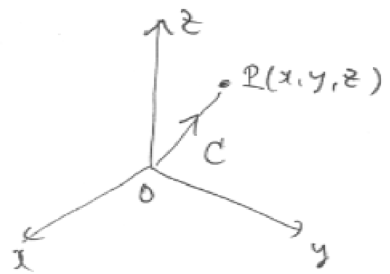
　はポテンシャルを持つことが知られている　(P91　7.)

① を用いてそのポテンシャルを求めてみる。

$\mathbf{A}$ は 3次元全体で滑らかなので $P_0 = O$ とする



(ア) O→A→B→P



(イ) O→P (直線)

OからPへの曲線はどうとってもよいので，上の(ア)(イ)の2通りで計算する。

(ア)　$O \to A$: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\bar{x}) = (\bar{x}, 0, 0)\ (0 \le \bar{x} \le x)$ — ②

　　$A \to B$: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\bar{y}) = (x, \bar{y}, 0)\ (0 \le \bar{y} \le y)$ — ③

　　$B \to P$: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\bar{z}) = (x, y, \bar{z})\ (0 \le \bar{z} \le z)$ — ④

とみれば　$O \to A$ では

$$d\mathbf{r} = \frac{d\mathbf{r}}{d\bar{x}} d\bar{x} = (1, 0, 0)\, d\bar{x} \quad (= (d\bar{x}, 0, 0))$$

同様に　$A \to B$ では $d\mathbf{r} = (0, d\bar{y}, 0)$

　　　$B \to P$ では $d\mathbf{r} = (0, 0, d\bar{z})$　なので

$$\int_O^P \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \int_O^A \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} + \int_A^B \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} + \int_B^P \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}$$

$$= \int_0^x A_x(\underset{②}{\bar{x}, 0, 0})\, d\bar{x} + \int_0^y A_y(\underset{③}{x, \bar{y}, 0})\, d\bar{y} + \int_0^z A_z(\overset{④}{x, y, \bar{z}})\, d\bar{z}$$

$$= \int_0^x 0\, d\bar{x} + \int_0^y (3x^2 - 0)\, d\bar{y} + \int_0^z (3x\bar{z}^2 - y)\, d\bar{z}$$

$$= 0 + \Big[3x^2\bar{y}\Big]_{\bar{y}=0}^{\bar{y}=y} + \Big[x\bar{z}^3 - y\bar{z}\Big]_{\bar{z}=0}^{\bar{z}=z}$$

$$= 3x^2y + xz^3 - yz$$

(イ)　この場合　$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (xt, yt, zt)\ (\underset{O}{0} \le t \le \underset{P}{1})$ — ⑤

とすればよい。

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}(P(t)) = (6(xt)(yt) + (zt)^3,\ 3(xt)^2 - (zt),\ 3(xt)(zt)^2 - yt)$$

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = (x, y, z) \quad より$$

$$\int_O^P \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 \{(6xyt^2 + z^3t^3)x + (3x^2t^2 - zt)y + (3xz^2t^3 - yt)z\}\, dt$$

$$= \int_0^1 (9x^2yt^2 + 4xz^3t^3 - 2yzt)\, dt$$

$$= \Big[3x^2yt^3 + xz^3t^4 - yzt^2\Big]_{t=0}^{t=1}$$

$$= 3x^2y + xz^3 - yz$$

∴ いずれにしても　$\Phi = \underline{-3x^2y - xz^3 + yz}\ (+C)$

（実際直接 $\nabla\Phi = -\mathbf{A}$ となることを確認できる）