−3 ③の左辺は

$$\iint_D\left(-\frac{\partial f}{\partial y}\right)dxdy=\int_a^b\left\{\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)}\left(-\frac{\partial f}{\partial y}\right)dy\right\}dx$$

$$=\int_a^b\Big[-f(x,y)\Big]_{y=\phi_1(x)}^{y=\phi_2(x)}dx$$

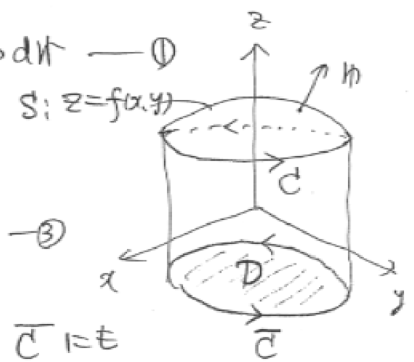
$$=\int_a^b\left\{-f(x,\phi_2(x))+f(x,\phi_1(x))\right\}dx=④+⑤$$

となるので③が成り立つ //

---

⑨ ストークスの公式

$$\int_S(\nabla\times A)\cdot n\,dS=\int_C A\circ dr \quad —①$$



を、

$$\begin{cases} A=(0,0,\phi(x,y,z)) \quad —②\\ S: z=f(x,y),\ (x,y)\in D \quad —③\\ n: 上向き \quad —④\end{cases}$$

の場合に示す。（この場合 Dの境界 $\bar{C}$ にも Cと同じ向きをつけることとする。）

②より $\nabla\times A=\left(\frac{\partial\phi}{\partial y},-\frac{\partial\phi}{\partial x},0\right)$，$A\circ dr=\phi dz$ なので、この場合①は

$$\int_S\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}n_x-\frac{\partial\phi}{\partial x}n_y\right)dS=\int_C\phi dz \quad —⑤$$

となる。前に見たように Sは $r=(x,y,f(x,y))$ で

$$n\,dS=+\frac{\partial r}{\partial x}\times\frac{\partial r}{\partial y}dxdy=\left(-\frac{\partial f}{\partial x},-\frac{\partial f}{\partial y},1\right)dxdy$$

だから $n_x dS=-\frac{\partial f}{\partial x}dxdy$，$n_y dS=-\frac{\partial f}{\partial y}dxdy$ より

$$⑤の左辺=\iint_D\left\{\frac{\partial\phi}{\partial y}\left(-\frac{\partial f}{\partial x}\right)-\frac{\partial\phi}{\partial x}\left(-\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right\}dxdy$$

$$=\iint_D\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\right)dxdy \quad —⑥$$

となる。

−3, $\bar{C}$を

$$\bar{C}: r=(x(t),y(t),0)\quad(a\le t\le b)$$

とすると Cは

$$C: r=(x(t),y(t),\underset{z}{f(x(t),y(t))})\quad(a\le t\le b) \quad —⑦$$

と書けるので、このパラメータ tに対し、C上

$$dz=\frac{dz}{dt}dt=\left\{\frac{d}{dt}f(x(t),y(t))\right\}dt$$

$$\underset{合}{=}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right)dt=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy \quad —⑧$$

$$\left(dx=\frac{dx}{dt}dt,\ dy=\frac{dy}{dt}dt\right)$$

S上のφの値

となるので、⑤の右辺は、$\psi(x,y)=\phi(x,y,f(x,y))$ とすると

⑧より

$$\int_C\phi dz=\int_C\phi(x,y,\underset{f(x,y)}{z})\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy\right)$$

← z=f(x,y)を代入するとzが消え、x,yのみの式になるので $\bar{C}$での線積分と同じになる。

$$=\int_{\bar{C}}\psi\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy\right)=\int_{\bar{C}}\left(\psi\frac{\partial f}{\partial x}\right)dx+\left(\psi\frac{\partial f}{\partial y}\right)dy \quad —⑨$$

xy平面上の線積分

となる。

この⑨に2次元のグリーンの公式を適用すれば

$$⑨=\iint_D\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\psi\frac{\partial f}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\psi\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right\}dxdy \quad —⑩$$

となるが、

$$⑩の中身=\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}+\cancel{\psi\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}}-\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}+\cancel{\psi\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}}\right)$$

$$=\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\underset{\uparrow\psi}{\phi(x,y,f(x,y))}-\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\phi(x,y,f(x,y))$$

$$=\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}+\cancel{\frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial x}}\right)-\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}+\cancel{\frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}}\right)$$

$$=\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial\phi}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial y}$$ ← ⑥の中身

となるので ⑩＝⑥ となり、すなわち ⑤が成り立つことになる。//