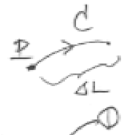
命題 4.A

(1) C : Pから出発する長さ ΔL の曲線



$$\Rightarrow \lim_{\Delta L\to 0}\frac{1}{\Delta L}\int_C \phi\, d\mathbf{r} = \phi(P)\frac{d\mathbf{r}}{ds}(0) \quad (\mathbf{r}=\mathbf{r}(s))$$

(2) S : Pを含む 面積 Δa の曲面

$$\Rightarrow \lim_{\Delta a\to 0}\frac{1}{\Delta a}\int_S \phi\, dS = \phi(P) \text{ — ②}$$

(3) V : Pを含む 体積 Δv の領域

$$\Rightarrow \lim_{\Delta v\to 0}\frac{1}{\Delta v}\int_V \phi\, dv = \phi(P) \text{ — ③}$$

($\phi\, d\mathbf{r}$ や $\phi\, dS$ を $A\cdot d\mathbf{r}$, $A\cdot n\, dS$ にした場合も同様のことがいえる)

(1) $\Delta L \fallingdotseq 0$ のとき C 上 $\phi(x,y,z)\fallingdotseq\phi(P)$ だから

$$\frac{1}{\Delta L}\int_C \phi\, d\mathbf{r} \fallingdotseq \phi(P)\frac{1}{\Delta L}\int_C d\mathbf{r} \underset{s\text{で}}{\fallingdotseq} \phi(P)\frac{1}{\Delta L}\int_0^{\Delta L}\underbrace{\frac{d\mathbf{r}}{ds}}_{\fallingdotseq \frac{d\mathbf{r}}{ds}(0)\ (\Delta L\fallingdotseq 0)} ds$$

$$\fallingdotseq \phi(P)\frac{d\mathbf{r}}{ds}(0)\frac{1}{\Delta L}\underbrace{\int_0^{\Delta L} ds}_{=\Delta L} = \phi(P)\frac{d\mathbf{r}}{ds}(0)$$, $\Delta L\to 0$ とすれば等号になる。

(2) $\Delta a \fallingdotseq 0$ のとき $\phi(x,y,z)\fallingdotseq\phi(P)$ で、定義より $\int_S dS = S$の面積 $=\Delta a$

だから $\frac{1}{\Delta a}\int_S \phi\, dS \fallingdotseq \phi(P)\frac{1}{\Delta a}\int_S dS = \phi(P)$, $\Delta a\to 0$ で等号になる

(3) (2)と同様 //

命題 4.B

(1) 任意の(有限な)曲線 C に対し $\int_C A\cdot d\mathbf{r}=0 \Rightarrow A\equiv 0$

(2) 〃 〃 曲面 S 〃 $\int_S A\cdot n\, dS=0 \Rightarrow A\equiv 0$

(3) 〃 〃 領域 V 〃 $\int_V \phi\, dv=0 \Rightarrow \phi\equiv 0$

(1) 任意の点 $P(a,b,c)$ に対し、曲線 C を $\mathbf{r}=(a+t,b,c)$ $(t\geqq 0)$

とすると t は弧長 s に等しく $\frac{d\mathbf{r}}{ds}(0)=(1,0,0)=\mathbf{i}$

だから 4.A(1)より

$$\lim_{\Delta L\to 0}\frac{1}{\Delta L}\underbrace{\int_C A\cdot d\mathbf{r}}_{=0\ \text{(仮定より)}} = A(P)\cdot\frac{d\mathbf{r}}{ds}(0) = A(P)\cdot\mathbf{i} = A_x(P)$$

$\therefore A_x(P)=0$, $A_y(P)=A_z(P)=0$ も同様

(2) 任意の点 P に対し、P中心 半径 r, yz平面に平行 $(n=\mathbf{i})$ な円板 S をとれば 4.A(2)より

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{\pi r^2}\underbrace{\int_S A\cdot n\, dS}_{=0\ \text{(仮定より)}} = A(P)\cdot\mathbf{i} = A_x(P) \quad \therefore A_x(P)=0$$

$A_y(P)=A_z(P)=0$ も同様

(3) (2)と同様に P中心半径 r の球をとればよい //

命題 4.C

(1) (表裏のある)任意の曲面 S の境界線 C に対し $\int_C A\cdot d\mathbf{r}=0 \Rightarrow \nabla\times A\equiv 0$

任意なのは S

閉曲線

(P108 定理4.6)

(2) 任意の領域 V の境界面 S に対し $\int_S A\cdot n\, dS=0 \Rightarrow \nabla\cdot A\equiv 0$

任意なのは V

閉曲面

(P99 定理4.3)

注 4.Bの方は閉曲線、閉曲面という制限はなく 4.Cより条件が強いので $A\equiv 0$ までいえるが、4.Cは $\nabla\times A\equiv 0$, $\nabla\cdot A$ までしかいえない

(1) ストークスの公式より $0=\int_C A\cdot d\mathbf{r} = \int_S(\nabla\times A)\cdot n\, dS$

よって 4.B(2)の A が $\nabla\times A$ の場合なので $\nabla\times A\equiv 0$

(2) 発散定理より $0=\int_S A\cdot n\, dS = \int_V \nabla\cdot A\, dv$

よって 4.B(3)の ϕ が $\nabla\cdot A$ の場合なので $\nabla\cdot A\equiv 0$ //

注 これは逆もいえる。例えば $\nabla\times A\equiv 0$ ならば

$$\int_C A\cdot d\mathbf{r} = \int_S \underset{0}{(\nabla\times A)}\cdot n\, dS = 0 \quad \text{となる。}$$

だから本当に $\nabla\times A\equiv 0$ 以上のことはいえないことになる

((2)も同様)

注 定理4.2(P98)、定理4.5(P107)も 4.Cと同じ論法で得られる。