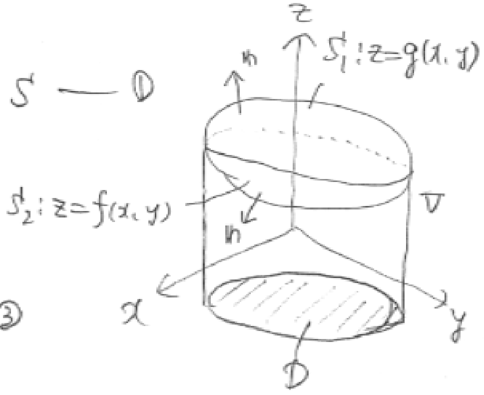
◎ 発散定理



$$\int_V \nabla\cdot\boldsymbol{A}\,dv = \int_S \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\,dS \quad \text{—①}$$

を

$$\begin{cases} \boldsymbol{A} = (0,0,\phi(x,y,z)) \quad \text{—②} \\ V : \begin{cases} f(x,y) \le z \le g(x,y) \quad \text{—③} \\ (x,y)\in D \end{cases} \\ (\text{ただし、}D\text{の境界上の}(x,y)\text{では }f(x,y)=g(x,y)\text{ とする}) \end{cases}$$

の場合に示す。　この場合　S は

$$\begin{cases} S_1 : z=g(x,y),\ (x,y)\in D \quad (\text{上面}) \\ S_2 : z=f(x,y),\ (x,y)\in D \quad (\text{下面}) \end{cases} \quad ④$$

となるので ②,④より　①は

$$\int_V \frac{\partial\phi}{\partial z}dv = \int_S \phi n_z dS = \int_{S_1}\phi n_z dS + \int_{S_2}\phi n_z dS \quad \text{—⑤}$$

となる。これを示す。

S_1 では　$\boldsymbol{r}=(x,y,g(x,y))$　なので　P62例題2のプリント参照.

$$\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial x}\times\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial y} = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}, -\frac{\partial g}{\partial y}, 1\right)$$

上向き

より　$\boldsymbol{n}$と同じ向き

$$\boldsymbol{n}dS = +\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial x}\times\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial y}dxdy = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}, -\frac{\partial g}{\partial y}, 1\right)dxdy$$

なので　$n_z dS = dxdy$　である。

$$\therefore \int_{S_1}\phi n_z dS = \iint_D \phi(x,y,g(x,y))\,dxdy \quad \text{—⑥}$$

となる。同様に S_2 では　$\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial x}\times\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial y} = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right)$ 大上向き

は $\boldsymbol{n}$と逆向きなので　$\boldsymbol{n}dS = -\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial x}\times\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial y}dxdy$　より

$n_z dS = -dxdy$　となるから

$$\int_{S_2}\phi n_z dS = \iint_D \{-\phi(x,y,f(x,y))\}dxdy \quad \text{—⑦}$$

となる。一方 ⑤の左辺は三重積分なので

$$\int_V \frac{\partial\phi}{\partial z}dv = \iint_D\left\{\int_{f(x,y)}^{g(x,y)}\frac{\partial\phi}{\partial z}dz\right\}dxdy$$

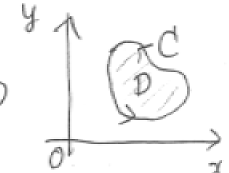
ｚについての積分

$$= \iint_D \left[\phi(x,y,z)\right]_{z=f(x,y)}^{z=g(x,y)}dxdy$$

$$= \iint_D\{\phi(x,y,g(x,y)) - \phi(x,y,f(x,y))\}dxdy = ⑥+⑦$$

となり ⑤が成り立つ。//

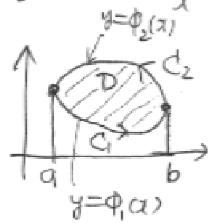
◎ 2次元のグリーンの公式



$$\iint_D\left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right)dxdy = \int_C f dx + g dy \quad \text{—①}$$

を、

$$\begin{cases} g(x,y) \equiv 0 \\ D: \phi_1(x) \le y \le \phi_2(x),\ a\le x\le b \quad \text{—②} \\ (\text{ただし } \phi_1(a)=\phi_2(a),\ \phi_1(b)=\phi_2(b) \text{ とする}) \end{cases}$$



の場合に示す。この場合 ①は

$$\iint_D\left(-\frac{\partial f}{\partial y}\right)dxdy = \int_C f dx = \int_{C_1} f dx + \int_{C_2} f dx \quad \text{—③}$$

となる。　C_1, C_2 は

C_1 : $\boldsymbol{r} = (x,\phi_1(x))$　$(a\le x\le b)$

C_2の逆向き　$-C_2$: $\boldsymbol{r} = (x,\phi_2(x))$　$(a\le x\le b)$

なので　x をパラメータとすると　$dx = dx$ だから

$$\begin{cases} \int_{C_1} f dx = \int_a^b f(x,\phi_1(x))dx \quad \text{—④} \\ \int_{C_2} f dx = -\int_{-C_2} f dx = -\int_a^b f(x,\phi_2(x))dx \quad \text{—⑤} \end{cases}$$

となる。