◎穴のある領域で，定理3.3（P87），定理3.4（P89）の成り立たない例（cf P88 例1）

例1

$$\mathbb{A} = \left( \frac{y}{x^2+y^2}, -\frac{x}{x^2+y^2}, 0 \right) : \quad (x,y)=(0,0) \text{ 以外で滑らかなベクトル場}$$

z軸

$$\nabla \times \mathbb{A} = \left( \underset{0}{\frac{\partial A_z}{\partial y}} - \underset{0}{\frac{\partial A_y}{\partial z}}, \underset{0}{\frac{\partial A_x}{\partial z}} - \underset{0}{\frac{\partial A_z}{\partial x}}, \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) = \mathbb{0}$$

$$\left( \begin{aligned} \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{x^2+y^2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) \\ &= -\frac{1}{x^2+y^2} + \frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2} - \left\{ \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2} \right\} = 0 \end{aligned} \right)$$

であるが $(x,y)=(0,0)$ 以外で滑らかなポテンシャルは持たない。

$$\phi = \phi(x,y,z) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \quad \left( \begin{array}{l} \arctan x \text{ は } \tan x \text{ の逆関数}, \\ -\frac{\pi}{2} < \arctan x < \frac{\pi}{2} \end{array} \right)$$

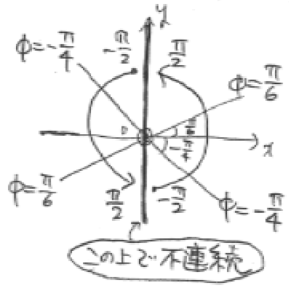
とすると，$\left\{ \begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{array} \right. \quad (r \geqq 0,\ -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \frac{y}{x} = \tan\theta$

$$\Rightarrow \theta = \arctan\frac{y}{x} = \phi \text{ なので}$$

$\phi$ は右のように $x=0$（$yz$平面）で不連続であるが，$x=0$ 以外では

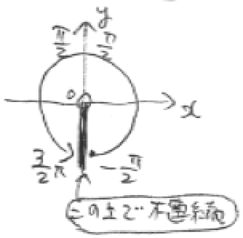
$$-\nabla\phi = -\left( \frac{-\frac{y}{x^2}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}, \frac{\frac{1}{x}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}, 0 \right) = \mathbb{A}$$

となる。 このようなスカラー場は $\phi + c$ しかない




$yz$平面の $y>0$ の部分で連続になるように

$$\psi = \left\{ \begin{array}{ll} \phi & (x>0) \\ \phi + \pi & (x<0) \end{array} \right.$$




としても，$y<0$ の部分では不連続となってしまう。つまり $z$軸を滑らかに1周するようなポテンシャルが作れない。

例2 $\mathbb{A} = \left( \frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}, 0 \right)$ （$z$軸以外で滑らか）

$$\nabla \cdot \mathbb{A} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) = 0 \text{ であり，}$$

本質的に例1と同等

$\mathbb{P} = \left(0, 0, \arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right)$ は $\nabla \times \mathbb{P} = \mathbb{A}$ となり （略）

$z$軸以外で滑らかなベクトルポテンシャルは存在しない

---

◎ 穴のない領域では，$\nabla \cdot \mathbb{A} = 0$ のとき

1. $\mathbb{P}_0 = (P_x, P_y, 0)$ の形のベクトルポテンシャルが存在する
2. $\mathbb{A}$ の任意のベクトルポテンシャル $\mathbb{P}$ は
$$\mathbb{P} = \mathbb{P}_0 + \nabla\phi \quad (\phi \text{ は任意のスカラー場})$$
で与えられる。

（⟶ 具体的なベクトルポテンシャルの計算に使用）

∵ 1. 定理3.4より $\mathbb{A}$ にはベクトルポテンシャルが少なくともひとつ存在する。それを $\mathbb{P}_1 = (P_x, P_y, P_z)$ とする。これに対し

$\psi = \psi(x,y,z) = \int P_z(x,y,z)\,dz$ として，$\mathbb{P}_0 = \mathbb{P}_1 - \nabla\psi$ とすると

$\mathbb{P}_0$ の $z$成分 $= P_z - \frac{\partial\psi}{\partial z} = P_z - P_z = 0$ であり，仮定より

$\nabla \times \mathbb{P}_1 = \mathbb{A}$ だから $\quad \nabla \times \mathbb{P}_0 = \underset{\mathbb{A}}{\nabla \times \mathbb{P}_1} - \underset{\mathbb{0}\ (\text{定理3.2})}{\nabla \times (\nabla\psi)} = \mathbb{A}$ となる。

2. $\mathbb{P} = \mathbb{P}_0 + \nabla\phi$ とすると $\nabla \times \mathbb{P} = \underset{\mathbb{A}}{\nabla \times \mathbb{P}_0} + \underset{\mathbb{0}}{\nabla \times (\nabla\phi)} = \mathbb{A}$ なので

$\mathbb{P}$ は確かに $\mathbb{A}$ のベクトルポテンシャルとなる。

逆に，$\mathbb{P}$ を $\mathbb{A}$ のベクトルポテンシャルとすると，

$\nabla \times (\mathbb{P}_0 - \mathbb{P}) = \nabla \times \mathbb{P}_0 - \nabla \times \mathbb{P} = \mathbb{A} - \mathbb{A} = \mathbb{0}$ となるので

定理3.3により $\mathbb{P}_0 - \mathbb{P}$ はスカラーポテンシャルを持つ。それを $\phi$ とすると $\quad \mathbb{P}_0 - \mathbb{P} = -\nabla\phi$ なので $\quad \mathbb{P} = \mathbb{P}_0 + \nabla\phi$ となる。

（つまり この形の式は常に $\mathbb{A}$ のベクトルポテンシャルであり，逆に $\mathbb{A}$ のベクトルポテンシャルは必ずこの形の式になる。）

//