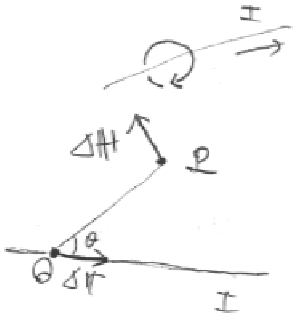
◎ビオ・サバールの法則（電流の周囲に発生する磁場）

(1) 微小部分を流れる電流の場合



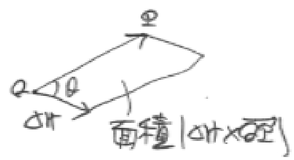
$$\begin{cases} I = \text{微小部分} \Delta\boldsymbol{r} \text{を流れる電流の強さ} \\ \Delta\mathbb{H} = \Delta\mathbb{H}(P) = \text{それによって点} P \text{に引き起こされる磁場（ベクトル場）} \end{cases}$$

とすると

$$\begin{cases} |\Delta\mathbb{H}| = \dfrac{1}{4\pi} \dfrac{I|\Delta\boldsymbol{r}|\sin\theta}{|\overrightarrow{QP}|^2} \quad (\theta \text{は} \Delta\boldsymbol{r} \text{と} \overrightarrow{QP} \text{のなす角}) \quad \text{— ①} \\ \Delta\mathbb{H} \text{の方向} = \Delta\boldsymbol{r}, \overrightarrow{QP} \text{に垂直で}, \Delta\boldsymbol{r} \text{から} \overrightarrow{QP} \text{へ右ねじを回して進む向き。} \quad \text{— ②} \end{cases}$$

がしられている（ビオ・サバールの法則）

② ⇒ $\Delta\mathbb{H} = \alpha\, \Delta\boldsymbol{r} \times \overrightarrow{QP} \quad (\alpha > 0)$ — ③ とおける



よって $|\Delta\mathbb{H}| = \alpha |\Delta\boldsymbol{r} \times \overrightarrow{QP}|$

$= \alpha |\Delta\boldsymbol{r}||\overrightarrow{QP}|\sin\theta$

となるので、これを①に代入

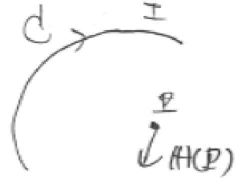
$$\alpha |\Delta\boldsymbol{r}||\overrightarrow{QP}|\sin\theta = \frac{1}{4\pi} \frac{I|\Delta\boldsymbol{r}|\sin\theta}{|\overrightarrow{QP}|^2}$$

よって $\alpha = \dfrac{1}{4\pi} \dfrac{I}{|\overrightarrow{QP}|^3}$ となるので、これを③に代入すれば

$$\therefore \Delta\mathbb{H} = \frac{1}{4\pi} \frac{I}{|\overrightarrow{QP}|^3} \Delta\boldsymbol{r} \times \overrightarrow{QP} = \underline{-\frac{I}{4\pi} \frac{\overrightarrow{QP} \times \Delta\boldsymbol{r}}{|\overrightarrow{QP}|^3}} \quad \text{— ④}$$

が得られる。

(2) 導線 C を流れる電流の場合

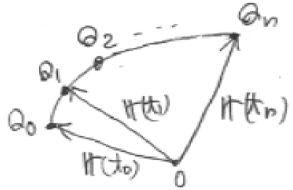


$$\begin{cases} I = \text{導線} C \text{を流れる電流の強さ} \\ \mathbb{H} = \mathbb{H}(P) = \text{それによって} P \text{に引き起こされる磁場（ベクトル場）} \end{cases}$$

とする。C を

$$C : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = \overrightarrow{OQ(t)} \quad (a \leq t \leq b)$$

とし、これを微小部分に分割する。



$$\begin{cases} \Delta t = \dfrac{b-a}{n}, \quad t_j = a + j\Delta t \\ Q_j = Q(t_j) \quad (j = 0, 1, 2, \ldots, n) \end{cases}$$

とし、$\Delta\boldsymbol{r}_j = \boldsymbol{r}(t_j) - \boldsymbol{r}(t_{j-1}) = \overrightarrow{Q_{j-1}Q_j}$ とすると

$\overline{Q_{j-1}Q_j}$ を通る電流が P に起こす磁場 $\Delta\mathbb{H}_j$ は ④より

$$\Delta\mathbb{H}_j \fallingdotseq -\frac{I}{4\pi} \frac{\overrightarrow{Q_jP} \times \Delta\boldsymbol{r}_j}{|\overrightarrow{Q_jP}|^3} \quad \text{— ⑤}$$

よって

$$\mathbb{H} = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \Delta\mathbb{H}_j = \lim_{n\to\infty} \left(-\frac{I}{4\pi}\right) \sum_{j=1}^{n} \frac{\overrightarrow{Q_jP} \times \Delta\boldsymbol{r}_j}{|\overrightarrow{Q_jP}|^3}$$

（$\lim_{n\to\infty}$ により⑤の誤差 → 0 となる）

$$= -\frac{I}{4\pi} \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \frac{\overrightarrow{OP} - \boldsymbol{r}(t_j)}{|\overrightarrow{OP} - \boldsymbol{r}(t_j)|^3} \times \Delta\boldsymbol{r}_j \quad (\overrightarrow{OQ_j} = \boldsymbol{r}(t_j))$$

$$= \underline{-\frac{I}{4\pi} \int_C \frac{\overrightarrow{OP} - \boldsymbol{r}}{|\overrightarrow{OP} - \boldsymbol{r}|^3} \times d\boldsymbol{r}}$$

（ビオ（J. B. Biot 1774–1862仏）
サバール（F. Savart 1791–1841仏））