2007 年 05 月 08 日

教科書の不定積分の定義について

新潟工科大学 情報電子工学科 竹野茂治

1 教科書の不定積分の定義

教科書 27 ページに、ベクトル関数の不定積分が紹介されているが、この教科書では、通常積分定数がついたものとして説明される「不定積分」が、どうやら積分定数のない「原始関数のひとつ」として説明されているように思われる。それは、27 ページ下から 10 行目に書かれている

$$\int \boldsymbol{A}(t)dt + \boldsymbol{C}$$

の式や、28 ページの例題 3 の解答例からもわかり、不定積分には積分定数をつけて考えてはいないようである。

しかし、そうだとすると 27 ページの下の公式はややあいまいで、いずれの式も左辺と右辺は積分定数 (または定ベクトル) の分だけ自由度があるので、それらをうまく合わせた上で成立する、という式になってしまう。

このような点を除くため、例年スカラー関数に対する「不定積分」と同様に、教科書とは異なり、

$$\int \boldsymbol{A}(t)dt = \boldsymbol{B}(t) + \boldsymbol{C} \quad (\boldsymbol{B}'(t) = \boldsymbol{A}(t)) \tag{1}$$

のように積分定数 (定ベクトル) のついた形として定義しているが、この定義だと、27 ページ下の公式は、多少変更する必要がある。それについて、以下で説明する。

2 不定積分の公式

27 ページ下に、以下のような不定積分の公式が書かれている。k, $\boldsymbol{K}$ がそれぞれ定数、定ベクトルであるとき、

$$\int k\boldsymbol{A}(t)dt = k\int \boldsymbol{A}(t)dt \tag{2}$$

$$\int \boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{A}(t)dt = \boldsymbol{K}\cdot\int \boldsymbol{A}(t)dt \tag{3}$$

$$\int \boldsymbol{K}\times\boldsymbol{A}(t)dt = \boldsymbol{K}\times\int \boldsymbol{A}(t)dt \tag{4}$$

が成り立つ、と書かれている。しかし、(1) の定義からすると、これらは厳密に言えば以下のように多少修正が必要である (なお、和の公式は問題はない)。

$$\int k\boldsymbol{A}(t)dt = k\int \boldsymbol{A}(t)dt + \boldsymbol{C} \tag{5}$$

$$\int \boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{A}(t)dt = \boldsymbol{K}\cdot\int \boldsymbol{A}(t)dt + C \tag{6}$$

$$\int \boldsymbol{K}\times\boldsymbol{A}(t)dt = \boldsymbol{K}\times\int \boldsymbol{A}(t)dt + \boldsymbol{C} \tag{7}$$

なぜこのような修正が必要なのか、以下に説明する。以下、$\boldsymbol{B}(t)$ を $\boldsymbol{B}'(t)=\boldsymbol{A}(t)$ (すなわち (1)) となるものであるとする。

3 定数倍の公式の場合

まず、(2) について考える。

24 ページの (1.1) より、

$$(k\boldsymbol{B})' = k\boldsymbol{B}' = k\boldsymbol{A}$$

であるから、(2) の左辺は、

$$\int k\boldsymbol{A}(t)dt = k\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}_1$$

となる。一方、(2) の右辺は

$$k\int \boldsymbol{A}(t)dt = k(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}_2) = k\boldsymbol{B} + k\boldsymbol{C}_2$$

となるので、(2) が成り立つためには、

$$\boldsymbol{C}_1 = k\boldsymbol{C}_2 \tag{8}$$

である必要がある。

任意の $\boldsymbol{C}_2$ に対して、(8) を満たす定ベクトル $\boldsymbol{C}_1$ は常に取ることができるが、任意の $\boldsymbol{C}_1$ に対して、(8) を満たす定ベクトル $\boldsymbol{C}_2$ は、$k\neq 0$ でないと取ることができない。よって $k=0$ の場合は (5) のように定ベクトルを入れないと合わなくなる。

ちなみに $k = 0$ の場合は、(2) の左辺は

$$\int 0\boldsymbol{A}dt = \int \boldsymbol{0}dt = \boldsymbol{C}_1$$

(2) の右辺は

$$0\int \boldsymbol{A}dt = 0$$

なので、ここからもその必要性はわかるだろう。

(5) であれば、$\boldsymbol{C}$ を

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}_1 - k\boldsymbol{C}_2$$

とすればいいだけなので、常に正しく成立する。

4 内積の公式の場合

次に、(3) について考える。この場合も事情は (2) とほぼ同じである。

24 ページの (1.1) より、

$$(\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{B})' = \boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{B}' = \boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{A}$$

であるから、(3) の左辺は、

$$\int \boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{A}(t)dt = \boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{B} + C_1$$

となる。一方、(3) の右辺は

$$\boldsymbol{K}\cdot\int \boldsymbol{A}(t)dt = \boldsymbol{K}\cdot(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}_2) = \boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{B} + \boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{C}_2$$

となるので、(3) が成り立つためには、

$$C_1 = \boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{C}_2 \tag{9}$$

である必要がある。

任意の $\boldsymbol{C}_2$ に対して、(9) を満たす定数 C_1 は常に取ることができるが、任意の C_1 に対して、(9) を満たす定ベクトル $\boldsymbol{C}_2$ は、$\boldsymbol{K} \neq \boldsymbol{0}$ でないと取ることができない。もし、$\boldsymbol{K} \neq \boldsymbol{0}$ ならば、例えば

$$\boldsymbol{C}_2 = \frac{C_1}{|\boldsymbol{K}|^2}\boldsymbol{K}$$

とすれば、

$$\boldsymbol{K} \cdot \boldsymbol{C}_2 = \frac{C_1}{|\boldsymbol{K}|^2}\boldsymbol{K} \cdot \boldsymbol{K} = C_1$$

となり、確かに (9) を満たす。

$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{0}$ の場合は、(3) の左辺は

$$\int \boldsymbol{0} \cdot \boldsymbol{A}dt = \int 0dt = C_1$$

(3) の右辺は

$$\boldsymbol{0} \cdot \int \boldsymbol{A}dt = 0$$

なので、$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{0}$ の場合は両辺を合わせるために定数を入れて (6) としなければならないことがわかる。

(6) であれば、C を

$$C = C_1 - \boldsymbol{K} \cdot \boldsymbol{C}_2$$

とすればいいだけなので、正しく成立する。

5 外積の公式の場合

最後に、(4) について考える。この場合は、事情は (2), (3) とはやや異なる。

24 ページの (1.1) より、

$$(\boldsymbol{K} \times \boldsymbol{B})' = \boldsymbol{K} \times \boldsymbol{B}' = \boldsymbol{K} \times \boldsymbol{A}$$

であるから、(4) の左辺は、

$$\int \boldsymbol{K} \times \boldsymbol{A}(t)dt = \boldsymbol{K} \times \boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}_1$$

となる。一方、(4) の右辺は

$$\boldsymbol{K} \times \int \boldsymbol{A}(t)dt = \boldsymbol{K} \times (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}_2) = \boldsymbol{K} \times \boldsymbol{B} + \boldsymbol{K} \times \boldsymbol{C}_2$$

となるので、(4) が成り立つためには、

$$\boldsymbol{C}_1 = \boldsymbol{K} \times \boldsymbol{C}_2 \tag{10}$$

である必要がある。

これも、任意の $\boldsymbol{C}_2$ に対して、(10) を満たす定ベクトル $\boldsymbol{C}_1$ は常に取ることができるが、任意の $\boldsymbol{C}_1$ に対して、(10) を満たす定ベクトル $\boldsymbol{C}_2$ は常には取ることができない。

(8), (9) の場合は、k, $\boldsymbol{K}$ が、それぞれ 0, $\boldsymbol{0}$ でなければよかったが、しかし、この場合はそうではない。$\boldsymbol{K} \neq \boldsymbol{0}$ の場合、(10) が成り立てば $\boldsymbol{C}_1$ は $\boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{C}_1$ に垂直でなくてはならないから、もし、$\boldsymbol{C}_1$ と $\boldsymbol{K}$ が垂直でない場合には、どのような $\boldsymbol{C}_2$ を取っても (10) を満たすようにすることはできない。

この場合も、(7) であれば、$\boldsymbol{C}$ を

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}_1 - \boldsymbol{K} \times \boldsymbol{C}_2$$

とすればいいだけなので、正しく成立する。

6 別の公式の上げ方

以上を考えると、27 ページ下のような書き方にせず、以下のようにした方が話はすっきりするだろうと思う。

$\hat{\boldsymbol{A}}'(t) = \boldsymbol{A}(t)$, $\hat{\boldsymbol{B}}'(t) = \boldsymbol{B}(t)$, $M'(t) = m(t)$ とするとき、

$$\int \{\boldsymbol{A}(t) + \boldsymbol{B}(t)\}dt = \hat{\boldsymbol{A}}(t) + \hat{\boldsymbol{B}}(t) + \boldsymbol{C} \tag{11}$$

$$\int k\boldsymbol{A}(t)dt = k\hat{\boldsymbol{A}}(t) + \boldsymbol{C} \tag{12}$$

$$\int m(t)\boldsymbol{K}dt = M(t)\boldsymbol{K} + \boldsymbol{C} \quad (13)$$

$$\int \boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{A}(t)dt = \boldsymbol{K}\cdot\hat{\boldsymbol{A}}(t) + C \quad (14)$$

$$\int \boldsymbol{K}\times\boldsymbol{A}(t)dt = \boldsymbol{K}\times\hat{\boldsymbol{A}}(t) + \boldsymbol{C} \quad (15)$$

なお、(13) は、教科書にはないものを追加したものである。いずれも証明は容易で、例えば (14) であれば、

$$(\boldsymbol{K}\cdot\hat{\boldsymbol{A}})' = \boldsymbol{K}\cdot\hat{\boldsymbol{A}}' = \boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{A}$$

より、

$$\int \boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{A}dt = \boldsymbol{K}\cdot\hat{\boldsymbol{A}} + C$$

となる、で済む。

7 最後に

4 節の計算などは、実は教科書 20〜 21 ページの問題 9, 10 にある「ベクトルの割り算」とも関連する。興味のある人は、そちらもついでに考えてみるとよいであろう。