

2007 年 05 月 08 日

教科書の不定積分の定義について

新潟工科大学 情報電子工学科 竹野茂治

1 教科書の不定積分の定義

教科書 27 ページに、ベクトル関数の不定積分が紹介されているが、この教科書では、通常積分定数がついたものとして説明される「不定積分」が、どうやら積分定数のない「原始関数のひとつ」として説明されているように思われる。それは、27 ページ下から 10 行目に書かれている

$$\int A(t)dt + C$$

の式や、28 ページの例題 3 の解答例からもわかり、不定積分には積分定数をつけて考えてはいないようである。

しかし、そうだとすると 27 ページの下公式はややあいまいで、いずれの式も左辺と右辺は積分定数 (または定ベクトル) の分だけ自由度があるので、それらをうまく合わせた上で成立する、という式になってしまう。

このような点を除くため、例年スカラー関数に対する「不定積分」と同様に、教科書とは異なり、

$$\int A(t)dt = B(t) + C \quad (B'(t) = A(t)) \quad (1)$$

のように積分定数 (定ベクトル) のついた形として定義しているが、この定義だと、27 ページ下の公式は、多少変更する必要がある。それについて、以下で説明する。

2 不定積分の公式

27 ページ下に、以下のような不定積分の公式が書かれている。 k , K がそれぞれ定数、定ベクトルであるとき、

$$\int kA(t)dt = k \int A(t)dt \quad (2)$$

$$\int K \cdot A(t)dt = K \cdot \int A(t)dt \quad (3)$$

$$\int K \times A(t)dt = K \times \int A(t)dt \quad (4)$$

が成り立つ、と書かれている。しかし、(1) の定義からすると、これらは厳密に言えば以下のように多少修正が必要である (なお、和の公式は問題はない)。

$$\int k\mathbf{A}(t)dt = k \int \mathbf{A}(t)dt + \mathbf{C} \quad (5)$$

$$\int \mathbf{K} \cdot \mathbf{A}(t)dt = \mathbf{K} \cdot \int \mathbf{A}(t)dt + C \quad (6)$$

$$\int \mathbf{K} \times \mathbf{A}(t)dt = \mathbf{K} \times \int \mathbf{A}(t)dt + \mathbf{C} \quad (7)$$

なぜこのような修正が必要なのか、以下に説明する。以下、 $B(t)$ を $B'(t) = A(t)$ (すなわち (1)) となるものであるとする。

3 定数倍の公式の場合

まず、(2) について考える。

24 ページの (1.1) より、

$$(k\mathbf{B})' = k\mathbf{B}' = k\mathbf{A}$$

であるから、(2) の左辺は、

$$\int k\mathbf{A}(t)dt = k\mathbf{B} + \mathbf{C}_1$$

となる。一方、(2) の右辺は

$$k \int \mathbf{A}(t)dt = k(\mathbf{B} + \mathbf{C}_2) = k\mathbf{B} + k\mathbf{C}_2$$

となるので、(2) が成り立つためには、

$$\mathbf{C}_1 = k\mathbf{C}_2 \quad (8)$$

である必要がある。

任意の C_2 に対して、(8) を満たす定ベクトル C_1 は常にとることができるが、任意の C_1 に対して、(8) を満たす定ベクトル C_2 は、 $k \neq 0$ でないと取ることができない。よって $k = 0$ の場合は (5) のように定ベクトルを入れないと合わなくなる。

ちなみに $k = 0$ の場合は、(2) の左辺は

$$\int 0A dt = \int 0 dt = C_1$$

(2) の右辺は

$$0 \int A dt = 0$$

なので、ここからもその必要性はわかるだろう。

(5) であれば、 C を

$$C = C_1 - kC_2$$

とすればいいだけなので、常に正しく成立する。

4 内積の公式の場合

次に、(3) について考える。この場合も事情は(2) とほぼ同じである。

24 ページの (1.1) より、

$$(K \cdot B)' = K \cdot B' = K \cdot A$$

であるから、(3) の左辺は、

$$\int K \cdot A(t) dt = K \cdot B + C_1$$

となる。一方、(3) の右辺は

$$K \cdot \int A(t) dt = K \cdot (B + C_2) = K \cdot B + K \cdot C_2$$

となるので、(3) が成り立つためには、

$$C_1 = K \cdot C_2 \tag{9}$$

である必要がある。

任意の C_2 に対して、(9) を満たす定数 C_1 は常にとることができるが、任意の C_1 に対して、(9) を満たす定ベクトル C_2 は、 $K \neq 0$ でないと取ることができない。もし、 $K \neq 0$ ならば、例えば

$$C_2 = \frac{C_1}{|K|^2} K$$

とすれば、

$$K \cdot C_2 = \frac{C_1}{|K|^2} K \cdot K = C_1$$

となり、確かに (9) を満たす。

$K = 0$ の場合は、(3) の左辺は

$$\int 0 \cdot A dt = \int 0 dt = C_1$$

(3) の右辺は

$$0 \cdot \int A dt = 0$$

なので、 $K = 0$ の場合は両辺を合わせるために定数を入れて (6) としなければならないことがわかる。

(6) であれば、 C を

$$C = C_1 - K \cdot C_2$$

とすればいいだけなので、正しく成立する。

5 外積の公式の場合

最後に、(4) について考える。この場合は、事情は (2), (3) とはやや異なる。

24 ページの (1.1) より、

$$(K \times B)' = K \times B' = K \times A$$

であるから、(4) の左辺は、

$$\int \mathbf{K} \times \mathbf{A}(t) dt = \mathbf{K} \times \mathbf{B} + \mathbf{C}_1$$

となる。一方、(4) の右辺は

$$\mathbf{K} \times \int \mathbf{A}(t) dt = \mathbf{K} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}_2) = \mathbf{K} \times \mathbf{B} + \mathbf{K} \times \mathbf{C}_2$$

となるので、(4) が成り立つためには、

$$\mathbf{C}_1 = \mathbf{K} \times \mathbf{C}_2 \quad (10)$$

である必要がある。

これも、任意の \mathbf{C}_2 に対して、(10) を満たす定ベクトル \mathbf{C}_1 は常にとることができるが、任意の \mathbf{C}_1 に対して、(10) を満たす定ベクトル \mathbf{C}_2 は常には取ることができない。

(8), (9) の場合は、 k, \mathbf{K} が、それぞれ $0, 0$ でなければよかったが、しかし、この場合はそうではない。 $\mathbf{K} \neq 0$ の場合、(10) が成り立てば \mathbf{C}_1 は \mathbf{K}, \mathbf{C}_1 に垂直でなくてはならないから、もし、 \mathbf{C}_1 と \mathbf{K} が垂直でない場合には、どのような \mathbf{C}_2 を取っても (10) を満たすようにすることはできない。

この場合も、(7) であれば、 \mathbf{C} を

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}_1 - \mathbf{K} \times \mathbf{C}_2$$

とすればいいだけなので、正しく成立する。

6 別の公式の上げ方

以上を考えると、27 ページ下のような書き方にせず、以下のようにした方が話はすっきりするだろうと思う。

$\hat{\mathbf{A}}'(t) = \mathbf{A}(t), \hat{\mathbf{B}}'(t) = \mathbf{B}(t), M'(t) = m(t)$ とするとき、

$$\int \{\mathbf{A}(t) + \mathbf{B}(t)\} dt = \hat{\mathbf{A}}(t) + \hat{\mathbf{B}}(t) + \mathbf{C} \quad (11)$$

$$\int k\mathbf{A}(t) dt = k\hat{\mathbf{A}}(t) + \mathbf{C} \quad (12)$$

$$\int m(t)\mathbf{K}dt = M(t)\mathbf{K} + \mathbf{C} \quad (13)$$

$$\int \mathbf{K} \cdot \mathbf{A}(t)dt = \mathbf{K} \cdot \hat{\mathbf{A}}(t) + C \quad (14)$$

$$\int \mathbf{K} \times \mathbf{A}(t)dt = \mathbf{K} \times \hat{\mathbf{A}}(t) + \mathbf{C} \quad (15)$$

なお、(13) は、教科書にはないものを追加したものである。いずれも証明は容易で、例えば (14) であれば、

$$(\mathbf{K} \cdot \hat{\mathbf{A}})' = \mathbf{K} \cdot \hat{\mathbf{A}}' = \mathbf{K} \cdot \mathbf{A}$$

より、

$$\int \mathbf{K} \cdot \mathbf{A}dt = \mathbf{K} \cdot \hat{\mathbf{A}} + C$$

となる、で済む。

7 最後に

4 節の計算などは、実は教科書 20~21 ページの問題 9, 10 にある「ベクトルの割り算」とも関連する。興味のある人は、そちらもついでに考えてみるとよいであろう。