2002 年 8 月 15 日

2002 年 応用数理 A 期末試験の答案について

新潟工科大学 情報電子工学科 竹野茂治

はじめに

後期試験を採点してみると、おおむね正しく計算している答案が多かったが、いくつか注意すべき間違いに気がついたのでここで紹介する。このような間違いをした、あるいはしそうだ、どこが間違いか分からない、という人は正しくはどうなるかを復習するとよい。

[1](b)

例えば

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial A_y}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial y}, \frac{\partial A_z}{\partial z}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(xy - 2z^2) = y - 2z^2$$

など。

[1](c)

教科書 p9 の公式 (2.15) (の上の式)、あるいは p10 例題 1 (1) の計算例をまねて計算したためか、真中の項 (y 成分の符号) を計算ミスしている答案が見られた。

[1](a),(b),(c) を通して

$$(xy - 2z^2)\frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{xy - 2z^2}{\partial x}$$

のようなおかしな記号を使うものがあった。

[2](a)

単位法線ベクトル、と言っているので、どちらも $\pm$ が必要だがそれのないものが多かった。

[2](b)

- 一般の式を計算しても正解にしない、と書いてあるのに一般の $\boldsymbol{A} = (A_x, A_y, A_z)$ に対する計算をしているもの

- 積の微分 (の展開) ができてないもの (ほとんどの答案がこれ)
- 何故か左辺も右辺も 0 となってしまうもの (どちらも 0 ではない)。例えば、

$$\nabla\phi \times \boldsymbol{A} = (\text{行列式による計算}) = \boldsymbol{i}\frac{\partial\phi}{\partial y}f - \boldsymbol{j}\frac{\partial\phi}{\partial x}f \tag{1}$$

より

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}f\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}f\right) && (2)\\ &= \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}f - \frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial x}f && (3)\\ &= 0 && (4)\end{aligned}$$

また、

$$\nabla \times \boldsymbol{A} = (\text{行列式による計算}) = \boldsymbol{i}\frac{\partial f}{\partial y} - \boldsymbol{j}\frac{\partial f}{\partial x} \tag{5}$$

より

$$\begin{aligned} \text{右辺} &= -\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\right) && (6)\\ &= -\frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} \quad (\text{偏微分の順序交換により}) && (7)\\ &= 0 && (8)\end{aligned}$$

どこが間違いであるか分かるであろうか。わからないなら、偏微分の順序交換について勉強せよ。

- または、左辺は (2) までで変形をやめ、右辺は (7) までで変形をやめ、その両者が等しいとしているものも多かったが、それでは等しいことの説明にはなっていない
- この公式を示すのに、それを含むようなより一般の公式 (教科書 $\mathrm{p84}$ (6.8)) を使っているもの

正しくは、(2) を積の微分法で展開して 4 つの項を出し、そのうち 2 つが消えて (7) と等しくなることを示す必要がある。そのような正解といえる答案は 1 枚しかなかった。

なお、この問題の日本語の文章に誤植があり、ややおかしな表現になっていたことをこの場を借りてお詫びするが、単に日本語の問題であり誤解はなかったと思う。

[3](a)

- $\boldsymbol{n}$ を

$$\boldsymbol{n} = \frac{\dfrac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v}}{\left|\dfrac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v}\right|}$$

としていて $n_z > 0$ の判別をしていないもの、あるいはこの式では $n_z < 0$ になるので答えに急に $-$ をつけるもの (正しくは右辺に $\pm$ がつき、その一方が $n_z > 0$ を満たす)

- $\partial \boldsymbol{r}/\partial u \times \partial \boldsymbol{r}/\partial v$ の計算を $\boldsymbol{i}$,$\boldsymbol{j}$,$\boldsymbol{k}$ の展開で行なう場合に $\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{i}$ を $\boldsymbol{i}^2$ や $\boldsymbol{ii}$ などと書くもの。ベクトルの積には内積、外積の 2 種類があるので、$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ の記法を正しく書き分けるべき。

[3](b)

- $dS = dudv$ としているもの
- $$\boldsymbol{n}dS = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} dudv$$
  としているもの (正しくは右辺に $-$ をつけないといけない)
- u,v の積分にしたのはいいが、x, y, z の式を u, v で積分して結果が x, y, z の式になっているもの
- x, y で積分しているもの $(dxdy)$
- 答えが負の数字になったのが気になったのか、その絶対値を答えとしているもの
- $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n} = (A_x n_x, A_y n_y, A_z n_z)$ としているもの
- 積分範囲が違うもの
- $\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{n}$ などを計算して怪しげな公式 $(?)$ で計算しているもの

最後に

答案は本人が分かればいい、というものではなく、教員に見せるものであるということを考え丁寧に書くこと。また、そうすることで後で間違いを見つけやすくなる。メモ書きの計算だと自分で見ても思い出すのに時間がかかる。