平成 16 年 7 月 29 日

2004 年度応用数理 A の講義の補足

新潟工科大学 情報電子工学科 竹野茂治

1 はじめに

最後の講義 (07/28) では積分公式の話をしたが、その最後の方はやや話が雑然となって中途半端な話に終ってしまったので、その部分を補足しておく。

2 任意の範囲での積分が 0

任意の範囲での積分が 0 ならば被積分関数自体が 0 になる、という事実がいくつか成り立つ。

定理 1

連続なスカラー場 ϕ, ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ に対して次がいえる。

1. どんな 3 次元領域 V に対しても $\displaystyle\int_V \phi dv = 0$ ならば $\phi \equiv 0$
2. どんな曲面 S に対しても $\displaystyle\int_S \phi dS = 0$ ならば $\phi \equiv 0$
3. どんな曲面 S に対しても $\displaystyle\int_S \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}dS = 0$ ならば $\boldsymbol{A} \equiv \boldsymbol{0}$
4. どんな曲線 C に対しても $\displaystyle\int_C \phi dt = 0$ ならば $\phi \equiv 0$
   (dt の積分でなく、ds や dx の積分などでも同じことが言える)
5. どんな曲線 C に対しても $\displaystyle\int_C \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} = 0$ ならば $\boldsymbol{A} \equiv \boldsymbol{0}$

これらはいずれも、1 次元の場合の、

6. 任意の a,b ($a < b$) に対して $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = 0$ ならば $f(x) \equiv 0$

と同様の方針で証明される。

この 6. は、「$f(x) \equiv 0$ ではないとしたら、$f(x_0) \neq 0$ となる点 x_0 が少なくとも一つあり (例えば $f(x_0) > 0$ とする)、$f(x)$ が連続ならばその x_0 の近くの x ではやはり正になるので、その x_0 の近くで積分すれば正の値になるはずなので矛盾」のように証明される。

なお、3., 5. は一見同様ではないようにも見えるが、例えば 3. は

$$\int_S \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}dS = \int_S (A_x n_x + A_y n_y + A_z n_z)dS$$

なので、例えば xy 平面に平行な面を取れば $n_z = 1$, $n_x = n_y = 0$ となり、そこから $A_z \equiv 0$ が導かれ、他の成分 A_x, A_y も yz 平面、xz 平面に平行な面を考えることで同様に 0 となることが言える。

3 閉曲面、閉曲線の場合

前節と同じ論法で、2., 4. を次のように変えても同様の事実が成り立つ。

定理 2

7. どんな領域の境界面 S (閉曲面) に対しても $\int_S \phi dS = 0$ ならば $\phi \equiv 0$
8. どんな曲面の境界線 C (閉曲線) に対しても $\int_C \phi dt = 0$ ならば $\phi \equiv 0$ (dt の積分でなく、ds の積分でも同じことが言える)

しかし、例えばこの 8. は、dx や $d\boldsymbol{r}$ の積分ではもはや成り立たない。それは、例えば $\phi \equiv \alpha$ ($= 0$ ではない定数) の場合、$\phi \equiv 0$ ではないが、任意の閉曲線に対して

$$\int_C \phi dx = \alpha \int_a^b x'(t)dt = \alpha\{x(b) - x(a)\} = 0$$

(閉曲線なので $x(a) = x(b)$) となってしまうからである。

つまり、「閉」曲線に関する積分の場合、その任意性は $\phi \equiv 0$ が言えてしまう程のものではないこともある。それはベクトル場に対しても同様であり、例えば以下の条件が満たされても ϕ, $\boldsymbol{A}$ は 0 (や $\boldsymbol{0}$) であるとは限らない。

9. どんな曲面の境界線 C (閉曲線) に対しても $\int_C \phi dx = 0$
10. どんな領域の境界面 S (閉曲面) に対しても $\int_S \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n} dS = 0$
11. どんな曲面の境界線 C (閉曲線) に対しても $\int_C \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r} = 0$

では、9., 10., 11., の元ではどこまで言えるかを考えてみる。

例えば 10. の条件の元では、その領域を V とすると、発散定理によりその V に対して

$$\int_S \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n} dS = \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{A} dv = 0$$

が言えることになる。よって V の任意性と 1. により $\nabla \cdot \boldsymbol{A} \equiv 0$ が成り立つ。

同様に、11. の元では、その曲面を S とするとストークスの公式により

$$\int_C \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_S (\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{n} dS = 0$$

が言える。よって S の任意性と 3. により $\nabla \times \boldsymbol{A} \equiv \boldsymbol{0}$ が成り立つ。

9. の場合は、$\boldsymbol{A} = (\phi, 0, 0)$ と考えれば $\boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r} = \phi dx$ なので、再びストークスの公式により

$$\int_C \phi dx = \int_C \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_S (\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{n} dS = 0$$

より 1. から

$$\nabla \times \boldsymbol{A} = \left(0, \frac{\partial \phi}{\partial z}, -\frac{\partial \phi}{\partial y}\right) = (0, 0, 0)$$

となり、よって $\partial\phi/\partial z = \partial\phi/\partial y = 0$ より $\phi(x, y, z) \equiv \psi(x)$ (x のみの 1 変数関数) となることが分かる。

命題 3

- 9. ならば $\phi(x,y,z)$ は x のみの関数
- 10. ならば $\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0$
- 11. ならば $\nabla\times\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$

もちろんこれらは逆も成立する。

4 最後に

定理 1 は、発散定理やストークスの公式の応用として流体の基礎方程式、電磁気学の基礎方程式を導く際に良く用いられるが、通常の教科書には 定理 1 の事実は当り前のこととしてあまり丁寧な説明は書かれていない。

しかし、定理 1 と定理 2、命題 3 の関係は上に見たようにやや微妙で、十分注意が必要な事実であるように感じる。

教科書には、定理 4.3, 定理 4.6 として上の命題 3 の事実が上げられているが、それらはそれぞれ定理 4.2, 定理 4.5 の応用として取り上げられている。しかし、むしろ上記のようにそれらの違いを正面から取り上げ、状況を明確に説明することの方が (定理 4.2, 定理 4.5 の事実自体よりも) 有益なのではないだろうか、と感じている。