

2018 年 11 月 12 日

# 多重剛体振り子の方程式

新潟工科大学 基礎教育・教養系 竹野茂治

## 1 はじめに

以前、ある問題を考察するために、「 $n$  重剛体振り子」の方程式を考えたことがあった。また最近その問題を思い出して、ついでにその数値計算もしてみたのだが、あまりうまくいかなかった。もしや方程式の導出が間違えているのかと思いネット上を探してみたのだが、「 $n$  重振り子」の方程式はあるものの、「 $n$  重剛体振り子」の方程式はまともなものがないようだった。

一方で、「 $n$  重剛体振り子」のシミュレーション例はネット上にもあるし、カオスとの関係で 2 重や 3 重の剛体振り子の実験例などは結構目にする。となれば、私が導出した  $n$  重剛体振り子の方程式を置いておくことにも意味がないわけではなさそうなので、それをここにまとめておくことにする。

## 2 設定

通常の振り子は、天井からぶらさがり軽い糸の先に重りをひとつつけるが、「剛体振り子」は、その系にあたる部分が剛体、すなわち金属や木など、形が変形せず質量があるものになっていて、この場合は先端の重りは必要なく、物理振り子と呼ばれることもあるようである。

剛体振り子の形状は、必ずしも棒状のものとは限らないが、本稿ではまっすぐな棒状のもののみを考える (1)。

また、多重振り子とは、振り子の先にまた振り子がつく、という構造になっているもので、 $n$  重は  $n$  個の振り子が端同士でつないであるものを指す (細かくいえば、本稿では「直列」な  $n$  重振り子を考える)。

なお、通常の振り子は、重りの先に次の振り子の糸を結べば済むが、剛体振り子の場合は、剛体同士が摩擦なく回転できるような (質量のない) ジョイントでつなぐ必要がある。また、大きな回転角も想定する場合は、その回転によって剛体同士、あるいは剛体が天井にぶつかることはない (すりぬけ条件) とか、何回転でも回転可能であるといった設定でシミュレーションをしていることも多い。本稿でも、特に回転角の制限やぶつかるような設定はせずに考察する。各剛体同士は、そのジョイントを通して互いに力を与えるが、それは作用反作用の関係になる。

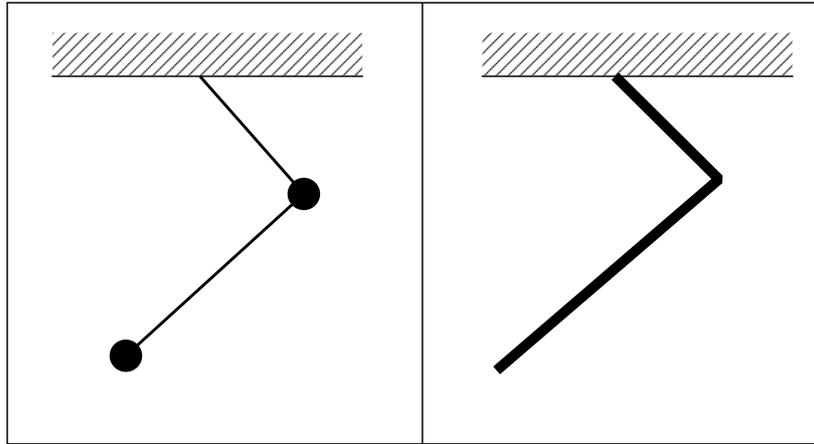


図 1: 多重振り子 (左は通常の振り子、右は剛体振り子)

また本稿では、剛体の運動は 1 平面内で起きるとし、よって回転もその平面内での回転とする。 $n$  個の剛体は、同じ材質、同じ太さのまっすぐな棒状のものとするが、長さは揃っている必要はないとする。

このような方程式の導出には、ラグランジュの運動方程式が良く用いられるようであるが、本稿では、より煩雑ではあるが古典的な方法、すなわちニュートンの運動方程式を用いることにする。

### 3 記号

1 平面内の剛体の運動は、各剛体の向きを示す  $n$  個の角を決めればすべての状態が決定するので、その  $n$  個の角が求めるべき未知関数となる。

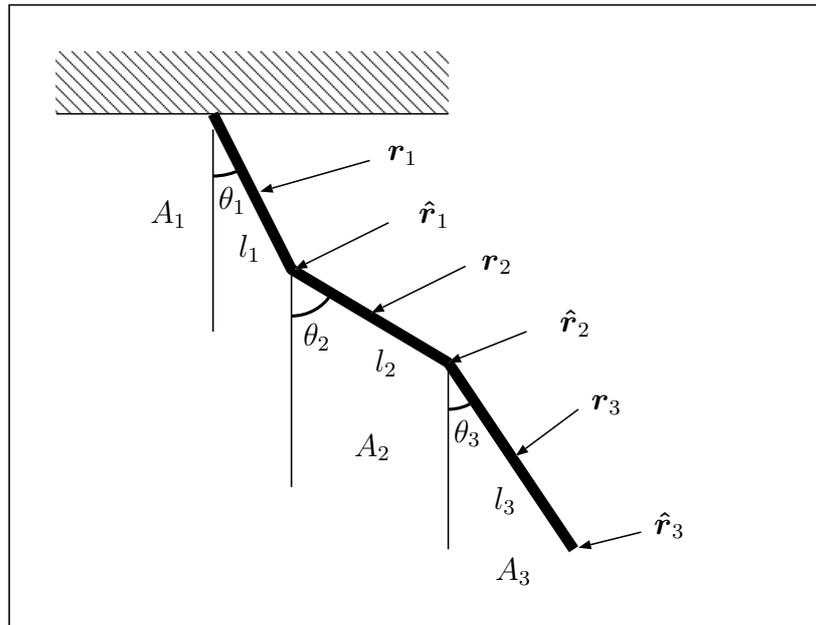
剛体の棒には、上から順に  $A_1, A_2, \dots, A_n$  と名前をつけ、各  $A_j$  の長さ、質量をそれぞれ  $l_j, m_j$  とするが、剛体棒の線密度を  $\rho$  とすれば  $m_j = \rho l_j$  となる。鉛直下向きの方角に対して、 $A_j$  が右側に回転した角を  $\theta_j$  とし、 $A_j$  の中心 (= 重心) の位置ベクトルを  $\mathbf{r}_j$ 、 $A_j$  と  $A_{j-1}$  のつなぎ目の位置ベクトルを  $\hat{\mathbf{r}}_{j-1}$  とする (図 2)。

鉛直下向きから右に  $\theta$  回転させた単位ベクトルを  $\mathbf{p}(\theta)$ 、それをさらに  $\pi/2$  回転させたベクトルを  $\mathbf{q}(\theta)$  とすると

$$\mathbf{p}(\theta) = (\sin \theta, -\cos \theta), \quad \mathbf{q}(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta)$$

であり、 $A_1$  は原点からぶらさげるとすれば、 $A_j$  は  $\mathbf{p}(\theta_j)$  の方向を向くので、

$$\hat{\mathbf{r}}_0 = 0, \quad \hat{\mathbf{r}}_j = \sum_{k=1}^j l_k \mathbf{p}(\theta_k) \quad (1)$$

図 2:  $l_j, \mathbf{r}_j, \hat{\mathbf{r}}_j, \theta_j$ 

となり、よって  $\mathbf{r}_j$  は

$$\mathbf{r}_j = \hat{\mathbf{r}}_{j-1} + \frac{l_j}{2} \mathbf{p}(\theta_j) = \sum_{k=1}^{j-1} l_k \mathbf{p}(\theta_k) + \frac{l_j}{2} \mathbf{p}(\theta_j) \quad (2)$$

となる。これで、全体が角  $\theta_1 \sim \theta_n$  で表されることになる。

## 4 運動方程式

運動方程式は、各剛体毎にその重心を中心とする方程式を考えればよく、そのために各剛体にかかる力を考える。

剛体  $A_j$  の重心  $\mathbf{r}_j$  には、 $A_j$  の質量に対する重力  $-m_j g \mathbf{e}_y$  ( $\mathbf{e}_y = (0, 1)$ ,  $g$  は重力加速度) がかかり、つなぎ目  $\hat{\mathbf{r}}_{j-1}, \hat{\mathbf{r}}_j$  の場所では、 $A_{j-1}, A_{j+1}$  からの力がかかる。 $A_{j+1}$  が  $\hat{\mathbf{r}}_j$  の場所で  $A_j$  に及ぼす力を  $\mathbf{T}_j$  とすると、その反作用により、 $A_j$  は  $\hat{\mathbf{r}}_j$  の場所で  $A_{j+1}$  に  $-\mathbf{T}_j$  の力を及ぼすことになる。

よって、 $A_j$  の運動方程式は、

$$m_j \ddot{\mathbf{r}}_j = \mathbf{T}_j - \mathbf{T}_{j-1} - m_j g \mathbf{e}_y \quad (1 \leq j \leq n) \quad (3)$$

となる。ここで、「 $\dot{\quad}$ 」は時刻  $t$  での微分を意味するものとする。なお、 $-\mathbf{T}_0$  は  $A_1$  を固定した始点からの反作用であり、また  $\mathbf{T}_n = 0$  であることに注意する。

次は  $r_j$  を中心とする回転運動の方程式を考える。

$A_j$  は単位ベクトル  $\mathbf{q}(\theta_j)$  に垂直で、 $\hat{\mathbf{r}}_j$  では  $\mathbf{q}(\theta_j)$  方向の力によって  $\theta$  が増える回転をする (3)。よって、 $\mathbf{T}_j$  が  $\hat{\mathbf{r}}_j$  で、 $r_j$  を中心に  $A_j$  を  $\theta_j$  の増える方向に回

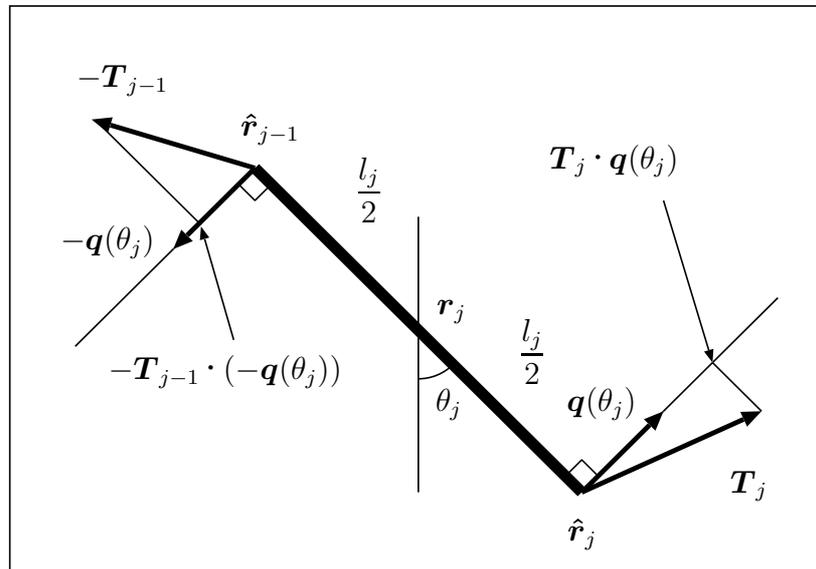


図 3:  $A_j$  に対する回転力のモーメント

そうとするモーメントは、

$$\frac{l_j}{2} \mathbf{T}_j \cdot \mathbf{q}(\theta_j)$$

の内積によって与えられる。同様に  $-\mathbf{T}_{j-1}$  が  $\hat{\mathbf{r}}_{j-1}$  で、 $r_j$  を中心に  $A_j$  を回そうとするモーメントは、

$$\frac{l_j}{2} (-\mathbf{T}_{j-1}) \cdot (-\mathbf{q}(\theta_j)) = \frac{l_j}{2} \mathbf{T}_{j-1} \cdot \mathbf{q}(\theta_j)$$

となる。よって、 $A_j$  の重心での慣性モーメントを  $I_j$  とすると、 $A_j$  の  $r_j$  中心での回転の方程式は次のようになる。

$$I_j \ddot{\theta}_j = \frac{l_j}{2} (\mathbf{T}_j + \mathbf{T}_{j-1}) \cdot \mathbf{q}(\theta_j) \quad (1 \leq j \leq n) \quad (4)$$

慣性モーメント  $I_j$  は、長さ  $l_j$  と線密度  $\rho$  により

$$I_j = \rho \int_{-l_j/2}^{l_j/2} x^2 dx = \frac{2\rho}{3} \left( \frac{l_j}{2} \right)^3 = \frac{\rho l_j^3}{12} = \frac{m_j l_j^2}{12} \quad (5)$$

となるので、(4) は

$$\frac{m_j l_j}{12} \ddot{\theta}_j = \frac{1}{2} (\mathbf{T}_j + \mathbf{T}_{j-1}) \cdot \mathbf{q}(\theta_j) \quad (1 \leq j \leq n) \quad (6)$$

となる。

(3) の運動方程式は、2次元ベクトルなので、成分で考えれば  $2n$  本あり、(6) は  $n$  本あるので合計  $3n$  本、未知関数は  $\mathbf{T}_0 \sim \mathbf{T}_{n-1}$  を成分で考えれば  $2n$  個、 $\theta_1 \sim \theta_n$  が  $n$  個なので、(3) と (6) から  $\mathbf{T}_0 \sim \mathbf{T}_{n-1}$  を消去すれば、 $\theta_1 \sim \theta_n$  に対する丁度  $n$  本の方程式が得られることになる。

## 5 相互力の消去

次に、ニュートンの運動方程式 (3) と回転の方程式 (6) から  $\mathbf{T}_0 \sim \mathbf{T}_{n-1}$  を消去する。

(3) より、

$$\mathbf{T}_{j-1} - \mathbf{T}_j = -m_j(\ddot{\mathbf{r}}_j + g\mathbf{e}_y) \quad (1 \leq j \leq n) \quad (7)$$

となるが、これを  $j = k+1$  から  $j = n$  まで加えると、 $\mathbf{T}_n = 0$  より

$$(\mathbf{T}_k - \mathbf{T}_{k+1}) + (\mathbf{T}_{k+1} - \mathbf{T}_{k+2}) + \cdots + (\mathbf{T}_{n-1} - \mathbf{T}_n) = \mathbf{T}_k$$

となるので、よって  $\mathbf{T}_k$  は

$$\mathbf{T}_k = - \sum_{j=k+1}^n m_j(\ddot{\mathbf{r}}_j + g\mathbf{e}_y) \quad (0 \leq k \leq n-1) \quad (8)$$

と表される。そして、これにより

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_j + \mathbf{T}_{j-1} &= -m_j(\ddot{\mathbf{r}}_j + g\mathbf{e}_y) - 2 \sum_{i=j+1}^n m_i(\ddot{\mathbf{r}}_i + g\mathbf{e}_y) \\ &= -\frac{d^2}{dt^2} \left( m_j \mathbf{r}_j + 2 \sum_{i=j+1}^n m_i \mathbf{r}_i \right) - \left( m_j + 2 \sum_{i=j+1}^n m_i \right) g\mathbf{e}_y \end{aligned} \quad (9)$$

となり、これを (6) に代入すれば  $\mathbf{T}_j$  が消去できることになる。その前に式 (9) を  $\mathbf{p}(\theta_k)$  を用いて表しておく。そのために、

$$\mathbf{r}_j = \sum_{k=1}^n a_{jk} \mathbf{p}(\theta_k) \quad (1 \leq j \leq n) \quad (10)$$

と書くことにする。(2) より、この  $a_{jk}$  は

$$a_{jk} = \begin{cases} l_k & (k < j) \\ \frac{l_j}{2} & (k = j) \\ 0 & (k > j) \end{cases} \quad (11)$$

となる。また、

$$L_j = \frac{l_j}{2} + \sum_{i=j+1}^n l_m \quad (1 \leq j \leq n) \quad (12)$$

とすれば、(9) の右辺 2 項目の係数は

$$m_j + 2 \sum_{i=j+1}^n m_i = \rho \left( l_j + 2 \sum_{i=j+1}^n l_i \right) = 2\rho L_j \quad (13)$$

と書ける。

(9) の右辺 1 項目の部分は、(10) により、

$$\begin{aligned} m_j \mathbf{r}_j + 2 \sum_{i=j+1}^n m_i \mathbf{r}_i &= m_j \sum_{k=1}^n a_{jk} \mathbf{p}(\theta_k) + 2 \sum_{i=j+1}^n m_i \sum_{k=1}^n a_{ik} \mathbf{p}(\theta_k) \\ &= \sum_{k=1}^n \mathbf{p}(\theta_k) \left( m_j a_{jk} + 2 \sum_{i=j+1}^n m_i a_{ik} \right) = \sum_{k=1}^n b_{jk} \mathbf{p}(\theta_k) \end{aligned} \quad (14)$$

の形となるが、 $b_{jk}$  は

$$b_{jk} = m_j a_{jk} + 2 \sum_{i=j+1}^n m_i a_{ik}$$

であり、 $k < j$  のときは (11) より

$$b_{jk} = m_j l_k + 2 \sum_{i=j+1}^n m_i l_k = 2\rho L_j l_k,$$

$k = j$  のときは、

$$b_{jj} = m_j a_{jj} + 2 \sum_{i=j+1}^n m_i a_{ij} = m_j \frac{l_j}{2} + 2 \sum_{i=j+1}^n m_i l_j = 2\rho \left( L_j - \frac{l_j}{4} \right) l_j,$$

$k > j$  のときは、

$$b_{jk} = 2m_k a_{kk} + 2 \sum_{i=k+1}^n m_i a_{ik} = m_k l_k + 2 \sum_{i=k+1}^n m_i l_k = 2\rho L_k l_k$$

となり、よって、

$$b_{jk} = \begin{cases} 2\rho L_j l_k & (k < j) \\ 2\rho \left( L_j - \frac{l_j}{4} \right) l_j & (k = j) \\ 2\rho L_k l_k & (k > j) \end{cases} = 2\rho \left( L_{j \vee k} - \frac{l_j}{4} \delta_{jk} \right) l_k \quad (15)$$

となる。ここで、 $a \vee b = \max\{a, b\}$ ,  $\delta_{jk} = 0$  ( $j \neq k$ ),  $\delta_{jj} = 1$  とする。

(15), および (13) により、(9) は、

$$\mathbf{T}_j + \mathbf{T}_{j-1} = - \sum_{k=1}^n 2\rho \left( L_{j \vee k} - \frac{l_j}{4} \delta_{jk} \right) l_k \ddot{\mathbf{p}}(\theta_k) - 2\rho L_j g \mathbf{e}_y \quad (16)$$

となる。ここで、

$$\ddot{\mathbf{p}}(\theta_k) = \frac{d}{dt} (\mathbf{p}'(\theta_k) \dot{\theta}_k) = \mathbf{p}''(\theta_k) (\dot{\theta}_k)^2 + \mathbf{p}'(\theta_k) \ddot{\theta}_k = -\mathbf{p}(\theta_k) (\dot{\theta}_k)^2 + \mathbf{q}(\theta_k) \ddot{\theta}_k$$

であり、

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(\theta_k) \cdot \mathbf{q}(\theta_j) &= (\sin \theta_k, -\cos \theta_k) \cdot (\cos \theta_j, \sin \theta_j) = -\sin(\theta_j - \theta_k), \\ \mathbf{q}(\theta_k) \cdot \mathbf{q}(\theta_j) &= (\cos \theta_k, \sin \theta_k) \cdot (\cos \theta_j, \sin \theta_j) = \cos(\theta_j - \theta_k), \\ \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{q}(\theta_j) &= \sin \theta_j \end{aligned}$$

なので、(16) より (6) は、

$$\begin{aligned} \frac{m_j l_j}{12} \ddot{\theta}_j &= \frac{1}{2} (\mathbf{T}_j + \mathbf{T}_{j-1}) \cdot \mathbf{q}(\theta_j) \\ &= -\rho \sum_{k=1}^n \left( L_{j \vee k} - \frac{l_j}{4} \delta_{jk} \right) l_k \{ (\dot{\theta}_k)^2 \sin(\theta_j - \theta_k) + \ddot{\theta}_k \cos(\theta_j - \theta_k) \} \\ &\quad - \rho L_j g \sin \theta_j \end{aligned}$$

となり、これを  $\rho$  で割れば、

$$\begin{aligned} \frac{l_j^2}{12} \ddot{\theta}_j + \sum_{k=1}^n \left( L_{j \vee k} - \frac{l_j}{4} \delta_{jk} \right) l_k \{ \ddot{\theta}_k \cos(\theta_j - \theta_k) + (\dot{\theta}_k)^2 \sin(\theta_j - \theta_k) \} \\ + L_j g \sin \theta_j = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

となるが、この式の  $\theta_j$  の微分の項をみると、

$$\frac{l_j^2}{12} \ddot{\theta}_j + \left( L_j - \frac{l_j}{4} \right) l_j \ddot{\theta}_j = \left( L_j - \frac{l_j}{6} \right) l_j \ddot{\theta}_j$$

であり、また (17) の  $(\dot{\theta}_j)^2$  の係数は 0 になるので、結局 (17) は

$$\sum_{k=1}^n \left( L_{j \vee k} - \frac{l_j}{6} \delta_{jk} \right) l_k \{ \ddot{\theta}_k \cos(\theta_j - \theta_k) + (\dot{\theta}_k)^2 \sin(\theta_j - \theta_k) \} + L_j g \sin \theta_j = 0 \quad (18)$$

と書くことができる。これが、陽ではないが、 $\theta_1 \sim \theta_n$  に対する 2 階の連立常微分方程式となる。

例えば、 $l_j = l$  ( $1 \leq j \leq n$ )、すなわちすべての  $A_j$  の長さが等しい場合は、

$$L_{j \vee k} - \frac{l_j}{6} \delta_{jk} = l \left( n - j \vee k + \frac{1}{2} \right) - \frac{l}{6} \delta_{jk} = \begin{cases} l \left( n - j \vee k + \frac{1}{2} \right) & (j \neq k) \\ l \left( n - j + \frac{1}{3} \right) & (j = k) \end{cases}$$

なので、この場合で  $n = 2$  のときに方程式を書き下すと、

$$\begin{cases} \frac{4\ddot{\theta}_1}{3} + \frac{1}{2} \{ \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + (\dot{\theta}_2)^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \} + \frac{3g}{2l} \sin \theta_1 = 0 \\ \frac{1}{2} \{ \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - (\dot{\theta}_1)^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \} + \frac{\ddot{\theta}_2}{3} + \frac{g}{2l} \sin \theta_2 = 0 \end{cases} \quad (19)$$

となる。

最後に、(18) を行列の形で書いておく。簡単のため、

$$\alpha_{jk} = \alpha_{jk}(l_1, \dots, l_n) = L_{j \vee k} - \frac{l_j}{6} \delta_{jk} \quad (20)$$

と書くことにすると、

$$A(\theta) = \left[ l_k \alpha_{jk} \cos(\theta_j - \theta_k) \right]_{j,k}, \quad B(\theta) = \left[ l_k \alpha_{jk} \sin(\theta_j - \theta_k) \right]_{j,k} \quad (21)$$

に対して、(18) は

$$A(\theta) \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \vdots \\ \ddot{\theta}_n \end{bmatrix} + B(\theta) \begin{bmatrix} (\dot{\theta}_1)^2 \\ \vdots \\ (\dot{\theta}_n)^2 \end{bmatrix} + g \begin{bmatrix} L_1 \sin \theta_1 \\ \vdots \\ L_n \sin \theta_n \end{bmatrix} = 0 \quad (22)$$

の形となる。なお、 $\alpha_{kj} = \alpha_{jk}$  なので、 $l_j = l$  ( $1 \leq j \leq n$ ) の場合は、 $A(\theta)$  は対称行列、 $B(\theta)$  は交代行列となる。

## 6 最後に

今回、摩擦のない多重剛体振り子の運動方程式の導出を、ラグランジュの運動方程式ではなく、ニュートンの運動方程式を用いて行った。1節にも書いたように、ネット上にはその方程式がほとんどなかったので、これを公開することは意味がないわけでもないだろう。

なお、現在(2018年11月12日)の日本語版のWikipediaに「二重振り子」の項目があり([1])、そこに $n=2$ の場合の二重剛体振り子(物理振り子)の方程式が書いてあるのだが、それは少し(19)の方程式とは係数が違っている。 $g$ の係数と対角成分の係数が違っているのであるが、前者は記載ミス、後者は剛体棒の慣性モーメントを考慮していない値ではないかと思われる。実際、大学の図書館で力学の演習書を見てみたところ、[2] p171、および[3] p177には、同じ問題の解として(19)と同じ式が書かれている。

なお、方程式(22)の解であるが、 $n=2,3$ で $|A(\theta)|$ などを計算してみたところからすると、一般の $n$ に対しても多分 $|A(\theta)| \neq 0$ であると思われる、よって(22)は正規形の方程式になるので局所解の存在は当然言える。しかし、方程式に $(\dot{\theta}_j)^2$ が含まれるため、解の大域的な存在を証明することはそれほど易しくはないと思われる。ただし、既に論文等で方程式(22)の解の大域的な存在が否定されている(反例がある)のか、それとも大域的な存在が示されているのかは私は知らない。

ちなみに、私は全体の長さ $nl=L$ を一定にして、 $n \rightarrow \infty$ にしたような物理モデルである、いわゆる「くさり」の偏微分方程式に興味があり、その方程式の解析、あるいは数値計算のための近似として $n$ 重剛体振り子が使えないかと思って考え始めたのであるが、今のところその解析も数値計算もあまりうまくいっていない。それは、 $n$ 重剛体振り子の方程式(22)自身が陽の形ではないために数値計算自体が面倒なこともあるが、 $n$ が多くなると先の方( $A_n$ )の動きが激しくなってしまうのがその原因ではないかと思う。そのような現象は、「くさり」の方程式を単純に差分化した場合も現れるので、その意味では $n$ 重剛体振り子が期待通りにくさりの近似になっているのかもしれないが、結局どちらでもうまくいかないことになっていて、まだこちらの研究は先は長そうである。

## 参考文献

- [1] Wikipedia、「二重振り子」：<https://ja.wikipedia.org/wiki/二重振り子>
- [2] 野上茂吉郎、「基礎物理学選書 力学演習」(1982)、裳華房
- [3] 小西岳、納繁男、「共立物理学講座、力学演習」(1984)、共立出版