

2026 年 07 月 30 日

原始関数を用いない定積分

新潟工科大学 基礎教育・教養系 竹野茂治

1 はじめに

関数 $f(x)$ の定積分は、通常は原始関数 $F(x)$ ($F'(x) = f(x)$) を用いて

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a) \quad (1)$$

により計算する。一方で $f(x)$ の定積分は、以下のように原始関数とは無関係に定義される。

定義 1

$f(x)$ は閉区間 $[a, b]$ 上で定義された有界な関数、 Δ_n は区間 $[a, b]$ の n 分割

$$\Delta_n : a = x_0 < x_1 < \cdots x_n = b$$

で、 $\bar{x}_k$ ($1 \leq k \leq n$) を各小区間内の標本点 ($x_{k-1} \leq \bar{x}_k \leq x_k$) とするとき、この分割と標本点と f に対する「リーマン和」 $S(\Delta_n)$ を

$$S(\Delta_n) = \sum_{k=1}^n f(\bar{x}_k)(x_k - x_{k-1}) \quad (2)$$

とし、分割の最大幅を

$$\delta(\Delta_n) = \max_{1 \leq k \leq n} (x_k - x_{k-1}) \quad (3)$$

とする。

$$n \rightarrow \infty \text{ かつ } \delta(\Delta_n) \rightarrow 0 \quad (4)$$

のときに、 $S(\Delta_n)$ が有限な極限值 S を常に持ち、その S が、 Δ_n の分点の取り方と標本点 $\{\bar{x}_k\}_k$ の取り方によらず一定な値であるとき、関数 $f(x)$ を「リーマン積分可能」、 S を「リーマン積分」と呼び

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

と書く。

そして、連続関数に対しては次が成り立つことが知られている。

命題 2

$f(x)$ が閉区間 $[a, b]$ 上の連続関数ならば、 $f(x)$ のリーマン積分可能。すなわち、連続関数 $f(x)$ のリーマン和 (2) は、(4) の条件を満たせば、常にその定積分に収束する。

つまり、原理的には、(1) でなく、リーマン和 (2) の極限でも積分が計算できることになるが、それは明らかに原始関数による (1) よりも煩雑なため、そのような計算を目にすることは少ない。

ただし、リーマン和 (2) の極限による積分計算は、「区分求積法」と呼ばれ、高校でもごく簡単な関数に対して区分求積法で積分を求めたり、逆に区分求積法の形の数列の和の極限を積分に直してそれを (1) で求めたりする問題を見ることはあるが、色々な関数の定積分をリーマン和の極限で求める計算はあまり見ることはないだろう。

これを本稿で紹介する。

2 x の自然数乗の定積分

まずは x の自然数乗 x^ℓ (ℓ : 自然数) の定積分

$$I_\ell(a, b) = \int_a^b x^\ell dx \quad (a < b) \quad (5)$$

を考える。以下の定理は、原始関数を使わなくてもリーマン積分に対して証明される。

命題 3

1. $f(x)$ が閉区間 $[a, b]$ でリーマン積分可能で、 $a < c < b$ のとき、

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

2. $f(x)$ が $[-a, a]$ のリーマン積分可能な奇関数のとき、

$$\int_{-a}^0 f(x)dx = - \int_0^a f(x)dx$$

3. $f(x)$ が $[-a, a]$ のリーマン積分可能な偶関数のとき、

$$\int_{-a}^0 f(x)dx = \int_0^a f(x)dx$$

この命題 3 により、 $I_\ell(a, b)$ は、 $b > 0$ に対する $[0, b]$ の積分

$$I_\ell(0, b) = \int_0^b x^\ell dx \quad (6)$$

だけ考えればよい。実際、 ℓ が偶数の場合は x^ℓ は偶関数なので、 $0 \leq a < b$ の場合は、命題 3 により、

$$I_\ell(a, b) = I_\ell(0, b) - I_\ell(0, a) \quad (7)$$

$a < 0 \leq b$ の場合は、

$$I_\ell(a, b) = I_\ell(a, 0) + I_\ell(0, b) = I_\ell(0, -a) + I_\ell(0, b) \quad (8)$$

$a < b < 0$ の場合は、

$$I_\ell(a, b) = I_\ell(a, 0) - I_\ell(b, 0) = I_\ell(0, -a) - I_\ell(0, -b) \quad (9)$$

となってすべて $a = 0, b > 0$ の場合に帰着される。奇関数の場合も同様である。

まず例として $\ell = 2$ の場合

$$I_2(0, b) = \int_0^b x^2 dx \quad (b > 0)$$

を考えてみよう。 x^2 はもちろん連続関数だから、命題 2 より分割は (4) を満たせばどのように取ってもよいことになるが、ここでは

$$x_k = \frac{k}{n}b, \quad \bar{x}_k = x_k \quad (1 \leq k \leq n) \quad (10)$$

すなわち、分割は n 等分とし、標本点は小区間の右端に取る。この場合は $\delta(\Delta_n) = b/n$ なので、 $n \rightarrow \infty$ のときに $\delta(\Delta_n) \rightarrow 0$ となって、 $n \rightarrow \infty$ であれば極限の条件 (4) は満

たされる。このとき、リーマン和 $S(\Delta_n)$ は、

$$\begin{aligned} S(\Delta_n) &= \sum_{k=1}^n (\bar{x}_k)^2 (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}b\right)^2 \frac{b}{n} = \frac{b^3}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2 \\ &= \frac{b^3}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{b^3}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right) \rightarrow \frac{b^3}{3} \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

なので、

$$I_2(0, b) = \int_0^b x^2 dx = \frac{b^3}{3} \quad (11)$$

となる。 x^2 は偶関数なので、(7), (8), (9) および (11) により、いずれの場合も

$$I_2(a, b) = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3} \quad (12)$$

となることがわかる。

一般の x^ℓ の場合には、(10) と同じ等分割で考えれば、そのリーマン和は

$$S(\Delta_n) = \sum_{k=1}^n (\bar{x}_k)^\ell (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}b\right)^\ell \frac{b}{n} = \frac{b^{\ell+1}}{n^{\ell+1}} \sum_{k=1}^n k^\ell \quad (13)$$

となるので、この極限が必要になる。この和を $\ell = 2$ の場合のようなひとつの式で表すのは難しいが、極限なら求めることができる。すなわち、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{\ell+1}} \sum_{k=1}^n k^\ell = \frac{1}{\ell+1} \quad (14)$$

となることを証明できる。なお、これは $\ell = 0$ でも成立するので、0 以上の整数 ℓ に対して帰納法で証明する。

$\ell = 0$ では、(14) は

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n} = 1$$

となるので (14) は成立する。次に $\ell \geq 1$ とし、0 以上 ℓ 未満の整数に対しては (14) が成り立つとしたときに、 ℓ の場合に (14) が成り立つことを示す。今、

$$(k+1)^{\ell+1} - k^{\ell+1} = \binom{\ell+1}{\ell} k^\ell + \binom{\ell+1}{\ell-1} k^{\ell-1} + \cdots + 1 = \sum_{j=0}^{\ell} \binom{\ell+1}{j} k^j$$

を $k = 1$ から $k = n$ まで加える。なお本稿では、二項係数 ${}_nC_k$ を $\binom{n}{k}$ と書く。その和は、

$$(n+1)^{\ell+1} - 1 = \binom{\ell+1}{\ell} \sum_{k=1}^n k^{\ell} + \binom{\ell+1}{\ell-1} \sum_{k=1}^n k^{\ell-1} + \cdots + n = \sum_{j=0}^{\ell} \binom{\ell+1}{j} \sum_{k=1}^n k^j$$

なので、 $n^{\ell+1}$ で割ると、

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\ell+1} - \frac{1}{n^{\ell+1}} = \binom{\ell+1}{\ell} \frac{1}{n^{\ell+1}} \sum_{k=1}^n k^{\ell} + \binom{\ell+1}{\ell-1} \frac{1}{n} \frac{1}{n^{\ell}} \sum_{k=1}^n k^{\ell-1} + \cdots + \frac{1}{n^{\ell}}$$

となるが、 $n \rightarrow \infty$ のときに左辺は 1 に収束し、右辺は最初の項以外は帰納法の仮定によりすべて 0 に収束する。よって、

$$1 = \binom{\ell+1}{\ell} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{\ell+1}} \sum_{k=1}^n k^{\ell} = (\ell+1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{\ell+1}} \sum_{k=1}^n k^{\ell}$$

となり、これで ℓ の場合に (14) が示されたことになって、0 以上のすべての整数 ℓ に対して (14) が証明されたことになる。

さて、(14) により、(13) の極限は $\frac{b^{\ell+1}}{\ell+1}$ となることがわかるので、これで

$$I_{\ell}(0, b) = \int_0^b x^{\ell} dx = \frac{b^{\ell+1}}{\ell+1} \quad (15)$$

が区分求積法により示されたことになり、また、(12) を導いた議論と同様にして、

$$I_{\ell}(a, b) = \int_a^b x^{\ell} dx = \frac{b^{\ell+1}}{\ell+1} - \frac{a^{\ell+1}}{\ell+1} \quad (16)$$

が得られる。実際、 ℓ が偶数の場合は I_2 の場合と全く同じで、 ℓ が奇数の場合は、 x^{ℓ} は奇関数で、(15) の積分値は偶数乗だから、 $0 \leq a < b$ の場合は

$$I_{\ell}(a, b) = I_{\ell}(0, b) - I_{\ell}(0, a) = \frac{b^{\ell+1}}{\ell+1} - \frac{a^{\ell+1}}{\ell+1} \quad (17)$$

$a < 0 \leq b$ の場合は、

$$I_{\ell}(a, b) = I_{\ell}(a, 0) + I_{\ell}(0, b) = -I_{\ell}(0, -a) + I_{\ell}(0, b) = \frac{b^{\ell+1}}{\ell+1} - \frac{a^{\ell+1}}{\ell+1} \quad (18)$$

$a < b < 0$ の場合は、

$$I_\ell(a, b) = I_\ell(a, 0) - I_\ell(b, 0) = -I_\ell(0, -a) + I_\ell(0, -b) = \frac{b^{\ell+1}}{\ell+1} - \frac{a^{\ell+1}}{\ell+1} \quad (19)$$

となって、いずれも (16) に一致する。

3 サインとコサインの定積分

次は、三角関数のうち、サインとコサインの定積分

$$I_{\sin}(a, b) = \int_a^b \sin x dx, \quad I_{\cos}(a, b) = \int_a^b \cos x dx \quad (a < b) \quad (20)$$

を考える。なお、 $I_{\cos}(a, b)$ は平行移動すると、

$$I_{\cos}(a, b) = \int_{a+\pi/2}^{b+\pi/2} \cos \left(x - \frac{\pi}{2} \right) dx = \int_{a+\pi/2}^{b+\pi/2} \sin x dx = I_{\sin} \left(a + \frac{\pi}{2}, b + \frac{\pi}{2} \right) \quad (21)$$

と $I_{\sin}$ で表されるので、 $I_{\sin}$ のみを考えればよい。

また、 $\sin x$ は奇関数だから、前節の議論と同様にして、 $a = 0, b > 0$ の場合のみ考えればよい。

$x_k, \bar{x}_k$ は、前節同様、分割は等間隔で標本点は右端 (10) に取る。このとき、リーマン和は

$$S(\Delta_n) = \sum_{k=1}^n \sin(\bar{x}_k)(x_k - x_{k-1}) = \frac{b}{n} \sum_{k=1}^n \sin \frac{k}{n} b \quad (22)$$

となるが、この和を求めるために、次の積和の公式を用いる。

$$\begin{cases} \sin(\alpha + k\theta) \sin \frac{\theta}{2} &= \frac{1}{2} \left\{ \cos \left(\alpha + \left(k - \frac{1}{2} \right) \theta \right) - \cos \left(\alpha + \left(k + \frac{1}{2} \right) \theta \right) \right\} \\ \cos(\alpha + k\theta) \sin \frac{\theta}{2} &= \frac{1}{2} \left\{ \sin \left(\alpha + \left(k + \frac{1}{2} \right) \theta \right) - \sin \left(\alpha + \left(k - \frac{1}{2} \right) \theta \right) \right\} \end{cases} \quad (23)$$

これにより、

$$S(\Delta_n) = \frac{b}{2n \sin(b/(2n))} \sum_{k=1}^n \left\{ \cos \frac{b}{n} \left(k - \frac{1}{2} \right) - \cos \frac{b}{n} \left(k + \frac{1}{2} \right) \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{b}{2n \sin(b/(2n))} \left\{ \cos \frac{b}{2n} - \cos \frac{b}{n} \left(n + \frac{1}{2} \right) \right\} \\
&= \frac{b/(2n)}{\sin(b/(2n))} \left\{ \cos \frac{b}{2n} - \cos b \left(1 + \frac{1}{2n} \right) \right\}
\end{aligned}$$

となる。ここで、良く知られているように

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad (24)$$

なので、 $n \rightarrow \infty$ のときに $S(\Delta_n)$ は $\cos 0 - \cos b = 1 - \cos b$ に収束し、これが $I_{\sin}(0, b)$ になるから

$$I_{\sin}(0, b) = \int_0^b \sin x dx = 1 - \cos b \quad (25)$$

となり、前節同様の議論により、 $I_{\sin}(a, b)$ は

$$I_{\sin}(a, b) = \int_a^b \sin x dx = \cos a - \cos b \quad (26)$$

となる。 $I_{\cos}(a, b)$ は、(21) により、

$$\begin{aligned}
I_{\cos}(a, b) &= \int_a^b \cos x dx = I_{\sin} \left(a + \frac{\pi}{2}, b + \frac{\pi}{2} \right) = \cos \left(a + \frac{\pi}{2} \right) - \cos \left(b + \frac{\pi}{2} \right) \\
&= \sin b - \sin a
\end{aligned} \quad (27)$$

となることがわかる。なお、 $\cos x$ の定積分も上と同様に積和の公式 (23) を用いて、リーマン和が収束することを直接示すこともできる。

4 指数関数の定積分

次は、指数関数の定積分

$$I_{\exp}(a, b) = \int_a^b A^x dx \quad (a < b) \quad (28)$$

を考える。ただし、 $A > 0$, $A \neq 1$ とする。 x_k は等間隔に取るが、ここでは $a = 0$ とはせずに考え、標本点は右端とする:

$$x_k = a + \frac{k}{n}(b - a), \quad \bar{x}_k = x_k \quad (1 \leq k \leq n) \quad (29)$$

このとき、リーマン和は、

$$\begin{aligned} S(\Delta_n) &= \sum_{k=1}^n A^{\bar{x}_k} (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n (A^{a+(b-a)k/n}) \frac{b-a}{n} \\ &= \frac{b-a}{n} A^a \sum_{k=1}^n (A^{(b-a)/n})^k = \frac{b-a}{n} A^a \frac{A^{(b-a)/n} - 1}{A^{(b-a)/n} - 1} A^{(b-a)/n} \end{aligned}$$

となり、よって、

$$S(\Delta_n) \frac{A^{(b-a)/n} - 1}{(b-a)/n} = A^a (A^{b-a} - 1) A^{(b-a)/n} = (A^b - A^a) A^{(b-a)/n} \quad (30)$$

となるが、良く知られているように、

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad (31)$$

であり、ここから

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{A^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \log_e A} - 1}{x \log_e A} \log_e A = \log_e A \quad (32)$$

が得られるので、(30) で $n \rightarrow \infty$ とすると左辺は $I_{exp}(a, b) \log_e A$ に収束し、右辺は $A^b - A^a$ に収束するので、

$$I_{exp}(a, b) = \int_a^b A^x dx = \frac{A^b - A^a}{\log_e A} \quad (33)$$

となる。

5 x の正の有理数乗の定積分

ここから数節は、2 節で考えた x の自然数乗の積分を、負の整数乗や有理数乗などに拡張することを考える。まず本節では、正の有理数乗の積分

$$I_{\ell/m}(a, b) = \int_a^b x^{\ell/m} dx \quad (0 \leq a < b) \quad (34)$$

を考える。ここで、 ℓ, m は互いに素な自然数とする。この場合も、

$$I_{\ell/m}(a, b) = I_{\ell/m}(0, b) - I_{\ell/m}(0, a)$$

より $a = 0, b > 0$ として考えればよいのでそれで考える。

まずは、例えば $\frac{\ell}{m} = \frac{1}{2}$ の場合を考えてみる。2 節と同様に x_k を等分割 (10) で取ると、この場合は

$$\frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \sqrt{k}$$

の極限が必要になるが、これを求めるのは難しそうなので、2 節とは異なり等分ではない分割を考え、 $x_k, \bar{x}_k$ を以下のように取る：

$$x_k = \left(\frac{k}{n}\right)^2 b \quad (0 \leq k \leq n), \quad \bar{x}_k = x_k \quad (35)$$

このようにすると、リーマン和は、

$$\begin{aligned} S(\Delta_n) &= \sum_{k=1}^n \sqrt{\bar{x}_k} (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \sqrt{b} \left\{ \left(\frac{k}{n}\right)^2 - \left(\frac{k-1}{n}\right)^2 \right\} b \\ &= \frac{b\sqrt{b}}{n^3} \sum_{k=1}^n k(2k-1) = \frac{b\sqrt{b}}{n^3} \left\{ \frac{n}{3}(n+1)(2n+1) - \frac{n}{2}(n+1) \right\} \\ &\rightarrow \frac{2}{3} b\sqrt{b} \end{aligned}$$

となるが、 $x_k - x_{k-1} = b(2k-1)/n^2$ なので、

$$\delta(\Delta_n) = \frac{b(2n-1)}{n^2} \rightarrow 0$$

となって収束条件 (4) を満たす。よって、

$$I_{1/2}(0, b) = \int_0^b \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} b\sqrt{b}, \quad I_{1/2}(a, b) = \int_a^b \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} (b\sqrt{b} - a\sqrt{a}) \quad (36)$$

となることがわかる。

一般の ℓ/m 乗の場合は、分割を

$$x_k = \left(\frac{k}{n}\right)^m b \quad (0 \leq k \leq n), \quad \bar{x}_k = x_k \quad (37)$$

とすると、リーマン和は

$$\begin{aligned} S(\Delta_n) &= \sum_{k=1}^n (\bar{x}_k)^{\ell/m} (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^\ell b^{\ell/m} \left\{ \left(\frac{k}{n}\right)^m - \left(\frac{k-1}{n}\right)^m \right\} b \\ &= \frac{b^{1+\ell/m}}{n^{\ell+m}} \sum_{k=1}^n k^\ell \{k^m - (k-1)^m\} \end{aligned}$$

となるが、この $n \rightarrow \infty$ の極限は (14) より

$$b^{1+\ell/m} \binom{m}{m-1} \frac{1}{\ell+m} = b^{1+\ell/m} \frac{m}{\ell+m} \quad (38)$$

となる。ここで一つ命題を紹介する。

命題 4

x_k を区間 $[a, b]$ の等分点 $x_k = a + (b-a)k/n$ ($0 \leq k \leq n$) とし、 $[a, b]$ 上の関数 $f(x)$ に対して $b_k = f(x_k) - f(x_{k-1})$ ($1 \leq k \leq n$) とする。

1. $f(x)$ が $[a, b]$ で下に凸な増加関数の場合、 b_k は増加数列。
2. $f(x)$ が $[a, b]$ で上に凸な増加関数の場合、 b_k は減少数列。
3. $f(x)$ が $[a, b]$ で下に凸な減少関数の場合、 $|b_k| = -b_k$ は減少数列。
4. $f(x)$ が $[a, b]$ で上に凸な減少関数の場合、 $|b_k| = -b_k$ は増加数列。

証明

$f(x)$ が下に凸 (強凸) とは、 $[a, b]$ 内の任意の p, q (p, q), 任意の $\theta \in [0, 1]$ に対して

$$f(\theta p + (1-\theta)q) < \theta f(p) + (1-\theta)f(q)$$

となることであるから、 $p = x_{k-1}$, $q = x_{k+1}$, $\theta = 1/2$ に対して $\theta p + (1-\theta)q = x_k$ なので、

$$f(x_k) < \frac{f(x_{k-1}) + f(x_{k+1}))}{2}$$

となり、よって $f(x_k) - f(x_{k-1}) < f(x_{k+1}) - f(x_k)$ となるので $b_k < b_{k+1}$ となる。よって、 $f(x)$ が増加関数ならば b_k は増加数列、 $f(x)$ が減少関数ならば $|b_k| = -b_k$ は減少数列。

$f(x)$ が上に凸な場合は、不等号の向きが逆になるだけで、上と同様にと言える。■

定積分に戻ると、(37) に関して命題 4 を適用すると、 x^m は下に凸な増加関数なので、 $\delta(\Delta_n)$ は $k = n$ で最大値を取り、

$$\delta(\Delta_n) = \left\{ 1 - \left(\frac{n-1}{n} \right)^m \right\} b$$

となるから、 $n \rightarrow \infty$ のときに $\delta(\Delta_n) \rightarrow 0$ となり収束条件も満たす。以上より、

$$\begin{aligned} I_{\ell/m}(0, b) &= \int_0^b x^{\ell/m} dx = \frac{b^{1+\ell/m}}{1+\ell/m}, \\ I_{\ell/m}(a, b) &= \int_a^b x^{\ell/m} dx = \frac{b^{1+\ell/m} - a^{1+\ell/m}}{1+\ell/m} \end{aligned} \quad (39)$$

が得られることになる。

6 x の -1 乗以外の負の整数乗

次は、 x の負の整数乗 $x^{-\ell}$ (ℓ は 2 以上の自然数) の定積分

$$I_{-\ell}(a, b) = \int_a^b x^{-\ell} dx \quad (0 < a < b) \quad (40)$$

を考えるが、この場合も分点は等間隔には取らない。リーマン和は

$$S(\Delta_n) = \sum_{k=1}^n (\bar{x}_k)^{-\ell} (x_k - x_{k-1}) \quad (41)$$

となるが、ここで、

$$x_k = 1/y_{n-k} \quad (0 \leq k \leq n), \quad \bar{x}_k = 1/\bar{y}_{n-k+1} \quad (1 \leq k \leq n) \quad (42)$$

とする。すなわち、 $1/x$ を y として、大小が逆順になるので添字を逆順につけ直したものを y_j とすると

$$\frac{1}{a} = y_n > y_{n-1} > \cdots > y_0 = \frac{1}{b}, \quad y_j \geq \bar{y}_j \geq y_{j-1} \quad (43)$$

となる。このとき、リーマン和を y で書くと

$$S(\Delta_n) = \sum_{k=1}^n (\bar{y}_{n-k+1})^\ell \left(\frac{1}{y_{n-k}} - \frac{1}{y_{n-k+1}} \right) = \sum_{j=1}^n (\bar{y}_j)^\ell \left(\frac{1}{y_{j-1}} - \frac{1}{y_j} \right) \quad (44)$$

となるが、標本点 $\bar{y}_j$ を

$$\bar{y}_j = (y_{j-1})^{1/\ell} (y_j)^{1-1/\ell} = y_j \left(\frac{y_{j-1}}{y_j} \right)^{1/\ell} \quad (45)$$

とすれば、 $0 < y_{j-1}/y_j < 1$ なので

$$1 > \left(\frac{y_{j-1}}{y_j} \right)^{1/\ell} > \frac{y_{j-1}}{y_j}$$

だから、確かに $y_j > \bar{y}_j > y_{j-1}$ となる。このとき、 $S(\Delta_n)$ は

$$S(\Delta_n) = \sum_{j=1}^n y_{j-1} (y_j)^{\ell-1} \frac{y_j - y_{j-1}}{y_{j-1} y_j} = \sum_{j=1}^n (y_j)^{\ell-2} (y_j - y_{j-1}) \quad (46)$$

となるので、丁度 $\int y^{\ell-2} dy$ のような形になるが、これはまさに (40) の $x = 1/y$ に関する置換積分に対応する。

y_j を、区間 $[1/b, 1/a]$ の n 等分点

$$y_j = \frac{1}{b} + \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \frac{j}{n} = c + d \frac{j}{n} \quad (0 \leq j \leq n) \quad (47)$$

と取ると、

$$S(\Delta_n) = \sum_{j=1}^n \left(c + d \frac{j}{n} \right)^{\ell-2} \frac{d}{n} \quad (48)$$

となり、 $\ell \geq 2$ より、これは $n \rightarrow \infty$ のときに

$$S = \int_c^{c+d} y^{\ell-2} dy$$

に収束するから、2 節 (16) の結果より、

$$S = I_{\ell-2}(c, c+d) = \frac{1}{\ell-1} \{(c+d)^{\ell-1} - c^{\ell-1}\} = \frac{1}{\ell-1} \left(\frac{1}{a^{\ell-1}} - \frac{1}{b^{\ell-1}} \right) \quad (49)$$

となる。なお、これは、(16) を用いなくても、(48) を展開して (14) を用いて直接極限を求めることでも得られるのであるが、その後の式の変形が少し面倒になる。

なお、この S が $I_{-\ell}(a, b)$ に一致するためには、収束条件 (4) を満たすことを示す必要があるが、

$$x_k = \frac{1}{y_{n-k}} = \frac{1}{c + d \frac{n-k}{n}} = \frac{1}{c + d - d \frac{k}{n}}$$

で、 $f(x) = 1/(c+d-dx)$ は $[0, 1]$ で下に凸な増加関数であるから、命題 4 より、 $\delta(\Delta_n)$ は $k = n$ で最大値を取り、

$$\delta(\Delta_n) = x_n - x_{n-1} = \frac{1}{y_0} - \frac{1}{y_1} = \frac{1}{c} - \frac{1}{c + d/n} = \frac{d/n}{c(c + d/n)}$$

となるので $\delta(\Delta_n) \rightarrow 0$ が言え、これで収束条件が満たされ、

$$I_{-\ell}(a, b) = \frac{1}{\ell-1} \left(\frac{1}{a^{\ell-1}} - \frac{1}{b^{\ell-1}} \right) = \frac{1}{1-\ell} (b^{1-\ell} - a^{1-\ell}) \quad (50)$$

となる。

7 x の負の有理数乗の定積分

次は、 x の負の有理数乗 $x^{-\ell/m}$ の定積分

$$I_{-\ell/m}(a, b) = \int_a^b x^{-\ell/m} dx \quad (0 < a < b) \quad (51)$$

を考える (ℓ, m は互いに素な自然数)。この場合も、リーマン和

$$S(\Delta_n) = \sum_{k=1}^n (\bar{x}_k)^{-\ell/m} (x_k - x_{k-1}) \quad (52)$$

に対して $y_k, \bar{y}_k$ を (42) と同じにとると、(44) と同様に

$$S(\Delta_n) = \sum_{k=1}^n (\bar{y}_{n-k+1})^{\ell/m} \left(\frac{1}{y_{n-k}} - \frac{1}{y_{n-k+1}} \right) = \sum_{j=1}^n (\bar{y}_j)^{\ell/m} \frac{y_j - y_{j-1}}{y_{j-1}y_j} \quad (53)$$

となる。標本点 $\bar{y}_j$ を

$$\bar{y}_j = (y_{j-1})^{m/\ell} (y_j)^{1-m/\ell} = y_j \left(\frac{y_{j-1}}{y_j} \right)^{m/\ell} \quad (54)$$

とすると、これが $y_{j-1} \leq \bar{y}_j \leq y_j$ となるためには $0 < m/\ell < 1$ が必要で、よって以下ではまず $0 < m/\ell < 1$ 、すなわち

$$\ell \geq m + 1 \quad (55)$$

を仮定して話を進める。このとき、リーマン和は、

$$S(\Delta_n) = \sum_{j=1}^n y_{j-1} (y_j)^{\ell/m-1} \frac{y_j - y_{j-1}}{y_{j-1}y_j} = \sum_{j=1}^n (y_j)^{\ell/m-2} (y_j - y_{j-1}) \quad (56)$$

となって $\int y^{\ell/m-2} dy$ のような形になる。分点 y_j を、

$$y_j = \left\{ b^{-1/m} + (a^{-1/m} - b^{-1/m}) \frac{j}{n} \right\}^m = \left(c + d \frac{j}{n} \right)^m = (A_j)^m \quad (0 \leq j \leq n) \quad (57)$$

と取ると、 $A_{j-1} = A_j - d/n$ より、

$$\begin{aligned} S(\Delta_n) &= \sum_{j=1}^n (A_j)^{\ell-2m} \left\{ (A_j)^m - \left(A_j - \frac{d}{n} \right)^m \right\} \\ &= - \sum_{j=1}^n (A_j)^{\ell-2m} \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m}{k} (A_j)^k \left(-\frac{d}{n} \right)^{m-k} \\ &= - \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m}{k} (-d)^{m-k} \frac{1}{n^{m-k}} \sum_{j=1}^n (A_j)^{\ell-2m+k} \end{aligned} \quad (58)$$

と変形できる。ここで、条件 (55) より、 $k = m-1$ に対しては、 $\ell-2m+k = \ell-m-1 \geq 0$ であるが、 $0 \leq k < m-1$ に対しては $\ell-2m+k < 0$ もありうる。その場合は、 $A_j \geq c$ より、

$$\frac{1}{n^{m-k}} \sum_{j=1}^n (A_j)^{\ell-2m+k} \leq \frac{c^{\ell-2m+k}}{n^{m-k-1}} \rightarrow 0$$

なので、そのような k に対する項は $n \rightarrow \infty$ で 0 になる。 $0 \leq k < m-1$ で $\ell-2m+k \geq 0$ の場合も、

$$\frac{d}{n} \sum_{j=1}^n (A_j)^{\ell-2m+k} = \frac{d}{n} \sum_{j=1}^n \left(c + d \frac{j}{n} \right)^{\ell-2m+k} \rightarrow \int_c^{c+d} x^{\ell-2m+k} dx$$

であるから、やはり

$$\frac{1}{n^{m-k}} \sum_{j=1}^n (A_j)^{\ell-2m+k} \rightarrow 0$$

となる。よって $n \rightarrow \infty$ のときに (58) で残るのは $k = m-1$ の項のみで、それは

$$\begin{aligned} - \binom{m}{m-1} \frac{-d}{n} \sum_{j=1}^n (A_j)^{\ell-m-1} &= m \frac{d}{n} \sum_{j=1}^n \left(c + d \frac{j}{n} \right)^{\ell-m-1} \\ &\rightarrow m \int_c^{c+d} x^{\ell-m-1} dx = m I_{\ell-m-1}(c, c+d) = \frac{m}{\ell-m} \{ (c+d)^{\ell-m} - c^{\ell-m} \} \\ &= \frac{m}{\ell-m} (a^{-(\ell-m)/m} - b^{-(\ell-m)/m}) \end{aligned}$$

となる。あとは、 $\delta(\Delta_n) \rightarrow 0$ を示せばこれが $I_{-\ell/m}(a, b)$ となる。(57) より、

$$x_k = \frac{1}{y_{n-k}} = \frac{1}{(c + d(n-k)/n)^m} = \frac{1}{(c + d - dk/n)^m}$$

であり、 $f_1(x) = 1/x^m$ は下に凸な減少関数で、よって $f_2(x) = 1/(c + d - dx)^m = f_1(c + d - dx)$ は $[0, 1]$ で下に凸な増加関数だから、命題 4 より $\delta(\Delta_n)$ は $k = n$ で最大値をとり、

$$\delta(\Delta_n) = x_n - x_{n-1} = \frac{1}{c^m} - \frac{1}{(c + d/n)^m} \rightarrow 0$$

となって収束条件も満たされる。これで、(55) の元では、

$$I_{-\ell/m}(a, b) = \frac{m}{\ell - m} (a^{-(\ell-m)/m} - b^{-(\ell-m)/m}) = \frac{1}{1 - \ell/m} (b^{1-\ell/m} - a^{1-\ell/m}) \quad (59)$$

が示されたことになる。

あとは、(55) 以外の

$$1 \leq \ell < m \quad (60)$$

の場合を考えればよい。なお、 ℓ と m は互いに素と仮定しているので $\ell = m$ の場合は考えなくてよい。この場合リーマン和 (52) は、分点 x_k を

$$x_k = \left\{ a^{1/m} + (b^{1/m} - a^{1/m}) \frac{k}{n} \right\}^m = \left(p + q \frac{k}{n} \right)^m = (B_k)^m$$

ととり、 $\bar{x}_k = x_k$ とすると、

$$\begin{aligned} S(\Delta_n) &= \sum_{k=1}^n (\bar{x}_k)^{-\ell/m} (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n (B_k)^{-\ell} \left\{ (B_k)^m - \left(B_k - \frac{q}{n} \right)^m \right\} \\ &= - \sum_{k=1}^n (B_k)^{-\ell} \sum_{j=0}^{m-1} \binom{m}{j} (B_k)^j \left(-\frac{q}{n} \right)^{m-j} \\ &= - \sum_{j=0}^{m-1} \binom{m}{j} \left(-\frac{q}{n} \right)^{m-j} \sum_{k=1}^n (B_k)^{j-\ell} \end{aligned} \quad (61)$$

となる。ここで、 $j = m-1$ に対しては、(60) より $j - \ell = m-1 - \ell \geq 0$ となるが、 $0 \leq j < m-1$ のときは $j - \ell < 0$ もありうる。しかしそのときは、 $B_k \geq p$ より、

$$\frac{1}{n^{m-j}} \sum_{k=1}^n (B_k)^{j-\ell} \leq \frac{p^{j-\ell}}{n^{m-1-j}} \rightarrow 0$$

となるし、 $j - \ell \geq 0$ ならば、

$$\frac{q}{n} \sum_{k=1}^n (B_k)^{j-\ell} = \frac{q}{n} \sum_{k=1}^n \left(p + q \frac{k}{n} \right)^{j-\ell} \rightarrow \int_p^{p+q} x^{j-\ell} dx$$

より、やはりその項は 0 に収束するから残るのは $j = m - 1$ の項だけで、(16) よりそれは

$$\begin{aligned} - \binom{m}{m-1} \left(-\frac{q}{n}\right) \sum_{k=1}^n (B_k)^{m-1-\ell} &= m \frac{q}{n} \sum_{k=1}^n \left(p + q \frac{k}{n}\right)^{m-1-\ell} \\ &\rightarrow m \int_p^{p+q} x^{m-1-\ell} dx = m I_{m-1-\ell}(p, p+q) = \frac{m}{m-\ell} \{(p+q)^{m-\ell} - p^{m-\ell}\} \\ &= \frac{m}{m-\ell} \{b^{(m-\ell)/m} - a^{(m-\ell)/m}\} \end{aligned}$$

となって極限は (59) と同じ式になる。あとは $\delta(\Delta_n) \rightarrow 0$ を示せばよいが、

$$x_k = \left(p + q \frac{k}{n}\right)^m$$

は、 $f(x) = (p + qx)^m$ が下に凸な増加関数なので $\delta(\Delta_n)$ は $k = n$ で最大値を取り、よって

$$\delta(\Delta_n) = (p+q)^m - \left(p + q \frac{n-1}{n}\right)^m \rightarrow 0$$

となって、収束条件も満たされる。よって、(60) の場合も、 $I_{-\ell/m}$ は (59) となる。

8 x の -1 乗の定積分

x の巾乗は、上までに有理数乗では -1 乗以外の定積分はすべて考えたことになるから、次は x^{-1} の定積分

$$I_{-1}(a, b) = \int_a^b x^{-1} dx \quad (0 < a < b) \quad (62)$$

を考える。この場合は、リーマン和

$$S(\Delta_n) = \sum_{k=1}^n (\bar{x}_k)^{-1} (x_k - x_{k-1})$$

で $x_k = e^{y_k}$, $\bar{x}_k = e^{\bar{y}_k}$ とすると、

$$\log_e a = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = \log_e b$$

で

$$S(\Delta_n) = \sum_{k=1}^n e^{-\bar{y}_k} (e^{y_k} - e^{y_{k-1}}) = \sum_{k=1}^n (e^{-\bar{y}_k + y_k} - e^{-\bar{y}_k + y_{k-1}})$$

となるが、標本点 $\bar{y}_k$ を $\bar{y}_k = (y_k + y_{k-1})/2$ と取ると、

$$S(\Delta_n) = \sum_{k=1}^n \{e^{(y_k - y_{k-1})/2} - e^{-(y_k - y_{k-1})/2}\}$$

となるので、分点 y_k を等間隔

$$y_k = \log_e a + \frac{k}{n} (\log_e b - \log_e a) = c + d \frac{k}{n}$$

と取ると $d > 0$ で、(31) より、

$$\begin{aligned} S(\Delta_n) &= \sum_{k=1}^n \{e^{d/(2n)} - e^{-d/(2n)}\} = n \{e^{d/(2n)} - e^{-d/(2n)}\} = \frac{e^{d/n} - 1}{d/n} e^{-d/(2n)} d \\ &\rightarrow d = \log_e b - \log_e a \end{aligned}$$

となる。 $\delta(\Delta_n)$ は、

$$x_k = e^{y_k} = e^{c+dk/n}$$

で $f(x) = e^{c+dx}$ は下に凸な増加関数なので、最大値は $k = n$ で取り、

$$\delta(\Delta_n) = e^{c+d} - e^{c+d(n-1)/n} \rightarrow 0$$

となって、よって

$$I_{-1}(a, b) = \log_e b - \log_e a \tag{63}$$

となることがわかる。

9 x の無理数乗の定積分

前節までに、 x の有理数乗の定積分はすべて求まったことになるが、 x の巾乗の最後に、無理数乗 x^α (α は無理数) の定積分

$$I_\alpha(a, b) = \int_a^b x^\alpha dx \quad (0 < a < b) \quad (64)$$

を考えることにする。なお、無理数乗 x^α は、ここでは、

$$x^\alpha = e^{\alpha \log_e x} \quad (x > 0) \quad (65)$$

により、指数関数と対数関数から定義されるものとする¹。

$I_\alpha(a, b)$ のリーマン和 $S(\Delta_n)$

$$S(\Delta_n) = \sum_{k=1}^n (\bar{x}_k)^\alpha (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n e^{\alpha \log_e \bar{x}_k} (x_k - x_{k-1})$$

において、標本点を $\bar{x}_k = x_k$ とし、変数を $\log_e x_k = t_k$ と置き換える。すると、

$$\log_e a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \log_e b$$

で、 t_k を等間隔に取り、

$$t_k = \log_e a + (\log_e b - \log_e a) \frac{k}{n} = c + \frac{dk}{n}$$

とすると、

$$\begin{aligned} S(\Delta_n) &= \sum_{k=1}^n e^{\alpha t_k} (e^{t_k} - e^{t_{k-1}}) = \sum_{k=1}^n (e^{(\alpha+1)t_k} - e^{\alpha t_k + t_{k-1}}) \\ &= \sum_{k=1}^n (e^{(\alpha+1)(c+dk/n)} - e^{(\alpha+1)(c+dk/n)-d/n}) \\ &= e^{(\alpha+1)c} (1 - e^{-d/n}) \sum_{k=1}^n (e^{(\alpha+1)d/n})^k \end{aligned}$$

¹細かく言えば、これが無理数乗の定義である必要はないが、以下ではこれを使って求めるので、少なくとも無理数乗に対してこれが成り立つことを認めて議論することにする。無理数乗の定義については、例えば [1] を参照せよ。

となる。ここで、 α は無理数だから $\alpha + 1 \neq 0$ で、 $d = \log_e b - \log_e a > 0$ だから、 $e^{(\alpha+1)d/n} \neq 1$ であり、よってこの和は、等比数列の和の公式により求められ、

$$\begin{aligned} S(\Delta_n) &= e^{(\alpha+1)c}(1 - e^{-d/n})e^{(\alpha+1)d/n} \frac{e^{(\alpha+1)d} - 1}{e^{(\alpha+1)d/n} - 1} \\ &= e^{(\alpha+1)c}(e^{d/n} - 1)e^{\alpha d/n} \frac{e^{(\alpha+1)d} - 1}{e^{(\alpha+1)d/n} - 1} \\ &= e^{\alpha d/n} \frac{e^{d/n} - 1}{d/n} \frac{(\alpha+1)d/n}{e^{(\alpha+1)d/n} - 1} \frac{e^{(\alpha+1)(c+d)} - e^{(\alpha+1)c}}{\alpha+1} \end{aligned}$$

と変形できる。この最後の式は (31) より、 $n \rightarrow \infty$ のときに

$$\frac{e^{(\alpha+1)(c+d)} - e^{(\alpha+1)c}}{\alpha+1} = \frac{e^{(\alpha+1)\log_e b} - e^{(\alpha+1)\log_e a}}{\alpha+1} = \frac{b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

に収束する。あとは、 $\delta(\Delta_n) \rightarrow 0$ を示せばこの値が $I_\alpha(a, b)$ となる。 x_k は、

$$x_k = e^{t_k} = e^{c+dk/n}$$

で、関数 e^{c+dx} は $d > 0$ より下に凸な増加関数だから、 $\delta(\Delta_n)$ は $k = n$ で最大となり、

$$\delta(\Delta_n) = e^{c+d} - e^{c+d(n-1)/n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty \text{ のとき})$$

となる。これで

$$I_\alpha(a, b) = \frac{b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}}{\alpha+1} \tag{66}$$

が言えたことになる。

なお、上の議論を見ればわかるが、本節の方法は α が無理数でなくても -1 以外の実数なら使えるので、2,5,6,7 節の結果も同様にして得られることになるが、有理数乗の場合は、本節のように指数関数や対数関数を使うのは自然ではないので、前節以前のように考える方がよいだろうと思う。

10 タンジェントの定積分

3 節では、 $\sin x$, $\cos x$ の定積分を考えたが、本節では $\tan x$ の定積分

$$I_{\tan}(a, b) = \int_a^b \tan x dx \quad \left(-\frac{\pi}{2} < a < b < \frac{\pi}{2}\right) \tag{67}$$

を考える。 $\tan x$ は奇関数なので、2 節と同様に $a = 0$, $0 < b < \pi/2$ の $I_{\tan}(0, b)$ のみ考えればよい。

$I_{\tan}(0, b)$ に対するリーマン和

$$S(\Delta_n) = \sum_{k=1}^n (\tan \bar{x}_k)(x_k - x_{k-1}) \quad (68)$$

を考える ($x_0 = 0$, $x_n = b$)。三角関数の積和の公式により、

$$\cos x_k - \cos x_{k-1} = -2 \sin \frac{x_k + x_{k-1}}{2} \sin \frac{x_k - x_{k-1}}{2}$$

となるので、標本点 $\bar{x}_k$ を中点 $(x_k + x_{k-1})/2$ と取ると、

$$\begin{aligned} (\tan \bar{x}_k)(x_k - x_{k-1}) &= \frac{\sin \bar{x}_k}{\cos \bar{x}_k} (x_k - x_{k-1}) \\ &= - \frac{\cos x_k - \cos x_{k-1}}{\cos \bar{x}_k} \frac{x_k - x_{k-1}}{2 \sin((x_k - x_{k-1})/2)} \end{aligned}$$

と変形できる。分点 x_k を等間隔 ($x_k = kb/n$) に取ると、

$$S(\Delta_n) = \frac{b/(2n)}{\sin(b/(2n))} \sum_{k=1}^n \frac{\cos x_{k-1} - \cos x_k}{\cos \bar{x}_k} \quad (69)$$

となる。ここで、

$$\begin{cases} t_j = \cos x_{n-j} = \cos \frac{n-j}{n} b & (0 \leq j \leq n) \\ \bar{t}_j = \cos \bar{x}_{n-j+1} = \cos \frac{x_{n-j+1} + x_{n-j}}{2} = \cos \frac{n-j+1/2}{n} b & (1 \leq j \leq n) \end{cases} \quad (70)$$

とすると

$$\cos x_n = \cos b = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \cos x_0 = 1, \quad t_{j-1} < \bar{t}_j < t_j$$

で、(69) は

$$S(\Delta_n) = \frac{b/(2n)}{\sin(b/(2n))} \sum_{j=1}^n \frac{t_j - t_{j-1}}{\bar{t}_j} \quad (71)$$

となる。

ここで t_j は、

$$t_j = \cos\left(b - \frac{j}{n}b\right)$$

で、 $0 < b < \pi/2$ より $f(x) = \cos(b - bx)$ は $[0, 1]$ は上に凸な増加関数なので、

$$\max_{1 \leq j \leq n} (t_j - t_{j-1}) = t_1 - t_0 = \cos \frac{n-1}{n}b - \cos b \rightarrow 0$$

となるから、(71) は $n \rightarrow \infty$ のときに 定理 2、および (24) により (71) は

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S(\Delta_n) = \int_{\cos b}^1 \frac{1}{t} dt$$

に収束する。(63) よりこの値は

$$\log_e 1 - \log_e \cos b = -\log_e \cos b$$

になる。

元々 x_k に関しては等分の分割だったので収束条件も満たされ、よって、

$$I_{\tan}(0, b) = \int_0^b \tan x dx = -\log_e \cos b \quad (72)$$

となることがわかり、2 節同様の議論により、

$$I_{\tan}(a, b) = \int_a^b \tan x dx = -\log_e \cos b + \log_e \cos a \quad (73)$$

となる。

なお、(71) の和の部分は、 $1/t$ の定積分のリーマン和の形で、上ではその極限を一回定積分に戻して、それを以前求めた積分値 (63) を使って求めたが、それを 8 節のように $t_k = e^{s_k}$ のように置き換えて直接その和の極限が積分値になることを示すのは難しい。それは、8 節では、 $t_k = e^{s_k}$ の s_k の方で等分に分割することで和を求めたが、(71) ではすでに t_k の分点は確定していて、 x_k の方で等分に取り替えているため、 s_k の方では等分にはできず、そのリーマン和を求めることができないからである。

本稿は、元々定理 2 をベースにしている、「どのような分割でも極限が求まる」ということでその中の都合のいい一つの分割を使って積分値を示しているから、一度原始関数なしで別な形で積分値を求めていれば、それを他の積分に流用することは 定理 2 の元では問題ないだろう。

11 対数関数の積分

ここから先の数節では、いくつか逆関数の定積分を考える。まずは $\log y$ の定積分

$$I_{\log}(a, b) = \int_a^b \log_e y dy \quad (0 < a < b) \quad (74)$$

を考える。

なお、底は e のものののみ考えるが、一般の底の場合は底の変換公式により、

$$\int_a^b \log_A y dy = \frac{1}{\log_e A} I_{\log}(a, b)$$

となるので、底が e のものののみ考えればよい。リーマン和は

$$S(\Delta_n) = \sum_{k=1}^n (\log_e \bar{y}_k)(y_k - y_{k-1}) \quad (75)$$

だが、標本点 $\bar{y}_k$ を左端 $\bar{y} = y_{k-1}$ に取り、 $\log_e y_k = x_k$ とすると、

$$\log_e a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = \log_e b$$

で、 $S(\Delta_n)$ を変形すると、

$$\begin{aligned} S(\Delta_n) &= \sum_{k=1}^n (\log_e \bar{y}_k)(y_k - y_{k-1}) = \sum_{k=1}^n x_{k-1}(e^{x_k} - e^{x_{k-1}}) \\ &= x_0 e^{x_1} + x_1 e^{x_2} + \cdots + x_{n-1} e^{x_n} - (x_0 e^{x_0} + x_1 e^{x_1} + \cdots + x_{n-1} e^{x_{n-1}}) \\ &= x_0 e^{x_1} + \cdots + x_{n-1} e^{x_n} - (x_1 e^{x_1} + \cdots + x_n e^{x_n}) - x_0 e^{x_0} + x_n e^{x_n} \\ &= - \sum_{k=1}^n e^{x_k} (x_k - x_{k-1} + b \log_e b - a \log_e a) \end{aligned}$$

となるので、 x_k を等分

$$x_k = \log_e a + \frac{k}{n} (\log_e b - \log_e a) = c + d \frac{k}{n}$$

と取れば、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S(\Delta_n) = - \int_{\log_e a}^{\log_e b} e^x dx + b \log_e b - a \log_e a$$

となり、4 節より、この極限は

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S(\Delta_n) = -b + a + b \log_e b - a \log_e a$$

となることがわかる。 $\delta(\Delta_n)$ は、

$$y_k = e^{x_k} = e^{c+dk/n}$$

で、 e^{c+dx} は下に凸な増加関数なので、 $k = n$ で最大値を取り、

$$\delta(\Delta_n) = e^{c+d} - e^{c+d(n-1)/n} \rightarrow 0$$

となって収束条件も満たされる。よって、

$$I_{\log}(a, b) = \int_a^b \log_e x dx = b \log_e b - a \log_e a - b + a \quad (76)$$

となる。

12 アークサインの積分

次は $\arcsin y$ の定積分

$$I_{\arcsin}(a, b) = \int_a^b \arcsin y dy \quad (-1 \leq a < b \leq 1) \quad (77)$$

を考える。まず $\arcsin y$ は奇関数なので、 $a = 0, 0 < b \leq 1$ として $I_{\arcsin}(0, b)$ のみ考えればよい。

前節でも使った、以下の和の書き換えを利用する:

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n f(y_{k-1})(y_k - y_{k-1}) &= \sum_{k=1}^n f(y_{k-1})y_k - \sum_{k=1}^n f(y_{k-1})y_{k-1} \\
 &= \sum_{k=1}^n f(y_{k-1})y_k - \sum_{k=1}^n f(y_k)y_k + f(y_0)y_0 + f(y_n)y_n \\
 &= -\sum_{k=1}^n y_k(f(y_k) - f(y_{k-1})) - f(y_0)y_0 + f(y_n)y_n
 \end{aligned} \tag{78}$$

これを使って、リーマン和の変形を行う。 $I_{asin}(0, b)$ のリーマン和

$$S(\Delta_n) = \sum_{k=1}^n (\arcsin \bar{y}_k)(y_k - y_{k-1}) \quad (y_0 = 0, y_n = b)$$

で、 $\bar{y}_k = y_{k-1}$, $\arcsin y_k = x_k$ とすると

$$0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = \arcsin b$$

で、(78) より、

$$\begin{aligned}
 S(\Delta_n) &= \sum_{k=1}^n (\arcsin y_{k-1})(y_k - y_{k-1}) \\
 &= -\sum_{k=1}^n y_k (\arcsin y_k - \arcsin y_{k-1}) + b \arcsin b - 0 \\
 &= -\sum_{k=1}^n (\sin x_k)(x_k - x_{k-1}) + b \arcsin b
 \end{aligned}$$

となる。よって x_k を等分

$$x_k = \frac{k}{n} \arcsin b$$

と取れば、

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S(\Delta_n) = -\int_0^{\arcsin b} \sin x dx + b \arcsin b$$

となる。(26) より、

$$S = \cos(\arcsin b) - \cos 0 + b \arcsin b$$

となるが、 $0 < \arcsin b \leq \pi/2$ なので、

$$\cos(\arcsin b) = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin b)} = \sqrt{1 - b^2}$$

となり、よって

$$S = \sqrt{1 - b^2} - 1 + b \arcsin b$$

となる。 $\delta(\Delta_n)$ は、

$$y_k = \sin x_k = \sin \left(\frac{k}{n} \arcsin b \right)$$

で、 $0 < \arcsin b < \pi/2$ より $\sin(x \arcsin b)$ は $[0, 1]$ で上に凸な増加関数なので $k = 1$ で最大値を取り、

$$\delta(\Delta_n) = y_1 - y_0 = \sin \frac{\arcsin b}{n} \rightarrow 0$$

となって収束条件も満たされる。よって、

$$I_{asin}(0, b) = \sqrt{1 - b^2} - 1 + b \arcsin b \quad (79)$$

となり、 $I_{asin}(a, b)$ は

$$I_{asin}(a, b) = \sqrt{1 - b^2} - \sqrt{1 - a^2} + b \arcsin b - a \arcsin a \quad (80)$$

となる。

なお、 $\arccos y$ は、

$$\arccos y = \frac{\pi}{2} - \arcsin y$$

なので、

$$\begin{aligned} \int_a^b \arccos y dy &= \frac{\pi}{2}(b - a) - \sqrt{1 - b^2} + \sqrt{1 - a^2} - b \arcsin b + a \arcsin a \\ &= -\sqrt{1 - b^2} + \sqrt{1 - a^2} + b \arccos b - a \arccos a \end{aligned}$$

となる。

13 アークタンジェントの定積分

逆関数の最後に、 $\arctan y$ の定積分

$$I_{atan}(a, b) = \int_a^b \arctan y dy \quad (a < b) \quad (81)$$

を考える。 $\arctan y$ も奇関数なので、 $a = 0, b > 0$ の $I_{atan}(0, b)$ で考える。

$\bar{y}_k = y_{k-1}$ とすれば、前節同様の計算によりリーマン和は、

$$\begin{aligned} S(\Delta_n) &= \sum_{k=1}^n (\arctan \bar{y}_k)(y_k - y_{k-1}) \\ &= - \sum_{k=1}^n (\tan x_k)(x_k - x_{k-1}) + b \arctan b - 0 \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\arctan y_k = x_k$ とした ($y_0 = 0, y_n = b$)。

そして x_k を等分割

$$x_k = \frac{k}{n} \arctan b$$

とすれば

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S(\Delta_n) = - \int_0^{\arctan b} \tan x dx + b \arctan b$$

となる。(73) より、

$$S = \log_e \cos(\arctan b) + b \arctan b$$

となるが、 $0 < \arctan b < \pi/2$ より、

$$\cos(\arctan b) = \sqrt{\frac{1}{1 + \tan^2(\arctan b)}} = \frac{1}{\sqrt{1 + b^2}}$$

となるので、

$$S = -\frac{1}{2} \log_e(1 + b^2) + b \arctan b$$

となる。

$$y_k = \tan x_k = \tan \left(\frac{k}{n} \arctan b \right)$$

で、 $0 < \arctan b < \pi/2$ より $\tan(x \arctan b)$ は $[0, 1]$ で下に凸な増加関数なので $\delta(\Delta_n)$ は $k = n$ で最大値となり、

$$\delta(\Delta_n) = \tan(\arctan b) - \tan \frac{(n-1) \arctan b}{n} \rightarrow 0$$

なので、

$$I_{atan}(0, b) = -\frac{1}{2} \log_e(1 + b^2) + b \arctan b \quad (82)$$

よって、

$$I_{atan}(a, b) = -\frac{1}{2} \log_e(1 + b^2) + \frac{1}{2} \log_e(1 + a^2) + b \arctan b - a \arctan a \quad (83)$$

となる。

14 部分積分の形

ここまでいくつかの節では、変数の置き換えを行ってリーマン和を計算する場面もあったが、それは「置換積分」に相当する。それに対して、本節以降の数節では「部分積分」に相当する定積分の区分求積について考察する。

まずは、指数関数の x 倍の定積分

$$I_{exp}(a, b) = \int_a^b x A^x dx \quad (a < b, A > 0, A \neq 1) \quad (84)$$

を考える。この定積分は、通常は $A^x = (A^x / \log_e A)'$ と見て部分積分するものであるが、これを区分求積で考える。

リーマン和は

$$S(\Delta_n) = \sum_{k=1}^n \bar{x}_k A^{\bar{x}_k} (x_k - x_{k-1})$$

であるが、 x_k は等分、標本点 $\bar{x}_k$ は右端に取る:

$$x_k = a + \frac{k}{n}(b-a) = a + c \frac{k}{n}, \quad \bar{x}_k = x_k$$

このとき、 $B = A^{c/n}$ とすると、

$$\begin{aligned} S(\Delta_n) &= \sum_{k=1}^n \left(a + c \frac{k}{n} \right) A^{a+ck/n} \frac{c}{n} = \frac{c}{n} A^a \sum_{k=1}^n \left(a + c \frac{k}{n} \right) B^k \\ &= cA^a \left(\sum_{k=1}^n \frac{a}{n} B^k + \frac{c}{n^2} \sum_{k=1}^n k B^k \right) \end{aligned}$$

となるが、

$$\sum_{k=1}^n B^k = B \frac{B^n - 1}{B - 1} = A^{c/n} \frac{A^c - 1}{A^{c/n} - 1}$$

であり、また kB^k の和は、

$$\begin{aligned} (B-1) \sum_{k=1}^n kB^k &= \sum_{k=1}^n (kB^{k+1} - kB^k) \\ &= (1 \cdot B^2 + 2 \cdot B^3 + \cdots + nB^{n+1}) - (1 \cdot B + 2 \cdot B^2 + 3 \cdot B^3 + \cdots + nB^n) \\ &= -(B + B^2 + B^3 + \cdots + B^n) + nB^{n+1} = -B \frac{B^n - 1}{B - 1} + nB^{n+1} \end{aligned}$$

より、

$$\sum_{k=1}^n kB^k = \frac{nB^{n+1}}{B-1} - B \frac{B^n - 1}{(B-1)^2} = \frac{nA^{c(n+1)/n}}{A^{c/n} - 1} - A^{c/n} \frac{A^c - 1}{(A^{c/n} - 1)^2}$$

となるので、 $S(\Delta_n)$ は

$$\begin{aligned} S(\Delta_n) &= aA^a A^{c/n} (A^c - 1) \frac{c/n}{A^{c/n} - 1} + A^a \frac{c^2}{n^2} \left\{ \frac{nA^{c(n+1)/n}}{A^{c/n} - 1} - A^{c/n} \frac{A^c - 1}{(A^{c/n} - 1)^2} \right\} \\ &= aA^a A^{c/n} (A^c - 1) \frac{c/n}{A^{c/n} - 1} + cA^a \frac{c/n}{A^{c/n} - 1} A^{c(1+1/n)} \\ &\quad - A^a (A^c - 1) A^{c/n} \left(\frac{c/n}{A^{c/n} - 1} \right)^2 \end{aligned}$$

となるが、(32) より $n \rightarrow \infty$ に対して

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S(\Delta_n) &= aA^a(A^c - 1) \frac{1}{\log_e A} + \frac{cA^a A^c}{\log_e A} - \frac{A^a(A^c - 1)}{(\log_e A)^2} \\ &= a \frac{A^b - A^a}{\log_e A} + \frac{(b-a)A^b}{\log_e A} - \frac{A^b - A^a}{(\log_e A)^2} \quad (c = b - a) \\ &= \frac{bA^b - aA^a}{\log_e A} - \frac{A^b - A^a}{(\log_e A)^2} \end{aligned}$$

となることがわかる。

x_k は等分点だから、これが $I_{xexp}(a, b)$ となる:

$$I_{xexp}(a, b) = \frac{bA^b - aA^a}{\log_e A} - \frac{A^b - A^a}{(\log_e A)^2} \quad (85)$$

さらに、 A^x の x^ℓ 倍の積分も原理的にはできるのであるが、その場合 $k^\ell B^k$ の和を求める必要があり、それがかなり面倒である。

15 サイン、コサインの x 倍の定積分

次は、サインやコサインの x 倍の定積分

$$I_{xsin}(a, b) = \int_a^b x \sin x dx, \quad I_{xcos}(a, b) = \int_a^b x \cos x dx \quad (a < b) \quad (86)$$

を考える。 $x \sin x$ は偶関数、 $x \cos x$ は奇関数だから $a = 0, b > 0$ の場合のみ考えればよい。3 節同様、分点は等分 ($x_k = kb/n$)、標本点は右端 ($\bar{x}_k = x_k$) に取る。このとき、 $I_{xsin}(0, b)$ のリーマン和 $S_{xsin}(\Delta_n)$ は、

$$S_{xsin}(\Delta_n) = \sum_{k=1}^n (\bar{x}_k \sin \bar{x}_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n \frac{b^2 k}{n^2} \sin \frac{bk}{n}$$

より、積和の公式 (23) を 2 回用いることで、

$$S_{xsin}(\Delta_n) = \frac{b^2}{2n^2 \sin(b/(2n))} \sum_{k=1}^n k \left\{ \cos \frac{b}{n} \left(k - \frac{1}{2} \right) - \cos \frac{b}{n} \left(k + \frac{1}{2} \right) \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{b^2}{2n^2 \sin(b/(2n))} \sum_{k=1}^n \left\{ k \cos \frac{b}{n} \left(k - \frac{1}{2} \right) - (k+1) \cos \frac{b}{n} \left(k + \frac{1}{2} \right) \right\} \\
&\quad + \frac{b^2}{2n^2 \sin(b/(2n))} \sum_{k=1}^n \cos \frac{b}{n} \left(k + \frac{1}{2} \right) \\
&= \frac{b^2}{2n^2 \sin(b/(2n))} \left\{ \cos \frac{b}{2n} - (n+1) \cos \frac{b}{n} \left(n + \frac{1}{2} \right) \right\} \\
&\quad + \frac{b^2}{4n^2 \sin^2(b/(2n))} \sum_{k=1}^n \left\{ \sin \frac{b(k+1)}{n} - \sin \frac{bk}{n} \right\} \\
&= \frac{b^2}{2n^2 \sin(b/(2n))} \left\{ \cos \frac{b}{2n} - (n+1) \cos b \left(1 + \frac{1}{2n} \right) \right\} \\
&\quad + \frac{b^2}{4n^2 \sin^2(b/(2n))} \left\{ \sin \frac{b(n+1)}{n} - \sin \frac{b}{n} \right\} \\
&= b \frac{b/(2n)}{\sin(b/(2n))} \left\{ \frac{1}{n} \cos \frac{b}{2n} - \left(1 + \frac{1}{n} \right) \cos b \left(1 + \frac{1}{2n} \right) \right\} \\
&\quad + \left(\frac{b/(2n)}{\sin(b/(2n))} \right)^2 \left\{ \sin b \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \sin \frac{b}{n} \right\}
\end{aligned}$$

と変形できる。よって、 $n \rightarrow \infty$ とすると、 x_k は等分なので $S_{x\sin}(\Delta_n)$ は $I_{x\sin}(0, b)$ に収束し、(24) より最後の式は $-b \cos b + \sin b$ に収束することがわかる。よって、

$$I_{x\sin}(a, b) = -b \cos b + a \cos a + \sin b - \sin a \quad (87)$$

となる。 $I_{x\cos}(a, b)$ のリーマン和 $S_{x\cos}(\Delta_n)$ も同じ分点、標本点に対して同様に積和の公式 (23) を用いて変形することで、

$$\begin{aligned}
S_{x\cos}(\Delta_n) &= \sum_{k=1}^n (\bar{x}_k \cos \bar{x}_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n \frac{b^2 k}{n^2} \cos \frac{bk}{n} \\
&= \frac{b^2}{2n^2 \sin(b/(2n))} \sum_{k=1}^n k \left\{ \sin \frac{b}{n} \left(k + \frac{1}{2} \right) - \sin \frac{b}{n} \left(k - \frac{1}{2} \right) \right\} \\
&= \frac{b^2}{2n^2 \sin(b/(2n))} \sum_{k=1}^n \left\{ (k+1) \sin \frac{b}{n} \left(k + \frac{1}{2} \right) - k \sin \frac{b}{n} \left(k - \frac{1}{2} \right) \right\} \\
&\quad - \frac{b^2}{2n^2 \sin(b/(2n))} \sum_{k=1}^n \sin \frac{b}{n} \left(k + \frac{1}{2} \right) \\
&= \frac{b^2}{2n^2 \sin(b/(2n))} \left\{ (n+1) \sin \frac{b}{n} \left(n + \frac{1}{2} \right) - \sin \frac{b}{2n} \right\} \\
&\quad - \frac{b^2}{4n^2 \sin^2(b/(2n))} \sum_{k=1}^n \left\{ \cos \frac{bk}{n} - \cos \frac{b(k+1)}{n} \right\} \\
&= \frac{b^2}{2n^2 \sin(b/(2n))} \left\{ (n+1) \sin b \left(1 + \frac{1}{2n} \right) - \sin \frac{b}{2n} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{b^2}{4n^2 \sin^2(b/(2n))} \left\{ \cos \frac{b}{n} - \cos \frac{b(n+1)}{n} \right\} \\
& = b \frac{b/(2n)}{\sin(b/(2n))} \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right) \sin b \left(1 + \frac{1}{2n}\right) - \frac{1}{n} \sin \frac{b}{2n} \right\} \\
& \quad - \left(\frac{b/(2n)}{\sin(b/(2n))} \right)^2 \left\{ \cos \frac{b}{n} - \cos b \left(1 + \frac{1}{n}\right) \right\}
\end{aligned}$$

となるので、極限は $b \sin b - 1 + \cos b$ となる。よって、

$$I_{xcos}(a, b) = b \sin b - a \sin a + \cos b - \cos a \quad (88)$$

が得られる。

なお、オイラーの公式を知っているという立場であれば、サインとコサインを合わせて複素指数で前節の方法で扱う、ということも可能である。

また、 x^2 倍の場合は積和の公式を 3 回使って考えなければならず、原理的には可能だが計算はだいぶ面倒になる。

16 サイン、コサインの指数関数倍の定積分

部分積分の最後に、サイン、コサインの指数関数倍の定積分

$$I_{expsin}(a, b) = \int_a^b e^x \sin x dx, \quad I_{expcos}(a, b) = \int_a^b e^x \cos x dx \quad (a < b) \quad (89)$$

を考える。これも x_k は等分にする：

$$x_k = a + (b - a) \frac{k}{n} = a + \frac{ck}{n} \quad (c = b - a)$$

まずは $I_{expsin}(a, b)$ のリーマン和 $S_{expsin}(\Delta_n)$ では、 $\bar{x}_k = x_k$ と取り、積和の公式 (23) を用いて変形する。なお、式を簡単にするために、以後 $H(x) = a + (cx)/n$ とする。

$$\begin{aligned}
S_{expsin}(\Delta_n) &= \sum_{k=1}^n e^{\bar{x}_k} (\sin \bar{x}_k) (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n e^{H(k)} (\sin H(k)) \frac{c}{n} \\
&= \frac{c}{2n \sin(c/(2n))} \sum_{k=1}^n e^{H(k)} \left\{ \cos H \left(k - \frac{1}{2} \right) - \cos H \left(k + \frac{1}{2} \right) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{c}{2n \sin(c/(2n))} \sum_{k=1}^n \left\{ e^{H(k)} \cos H \left(k - \frac{1}{2} \right) - e^{H(k+1)} \cos H \left(k + \frac{1}{2} \right) \right\} \\
&\quad + \frac{c}{2n \sin(c/(2n))} \sum_{k=1}^n \left(e^{H(k+1)} - e^{H(k)} \right) \cos H \left(k + \frac{1}{2} \right) \\
&= \frac{c}{2n \sin(c/(2n))} \left\{ e^{H(1)} \cos H \left(\frac{1}{2} \right) - e^{H(n+1)} \cos H \left(n + \frac{1}{2} \right) \right\} \\
&\quad + \frac{1}{2 \sin(c/(2n))} (e^{c/(2n)} - e^{-c/(2n)}) \sum_{k=1}^n e^{H(k+1/2)} \left(\cos H \left(k + \frac{1}{2} \right) \right) \frac{c}{n}
\end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned}
e^{H(k+1)} - e^{H(k)} &= e^{a+c(k+1)/n} - e^{a+ck/n} = e^{a+c(k+1/2)/n} (e^{c/(2n)} - e^{-c/(2n)}) \\
&= e^{H(k+1/2)} (e^{c/(2n)} - e^{-c/(2n)})
\end{aligned}$$

とした。この最後の和の部分は、標本点を $\bar{x}_k = H(k+1/2) = (x_k + x_{k-1})/2$ とした、 $I_{\exp \cos}(a, b)$ のリーマン和になっているので、これを $S_{\exp \cos}(\Delta_n)$ とする。

次は、この $S_{\exp \cos}(\Delta_n)$ を変形する。積和の公式 (23) より、

$$\begin{aligned}
S_{\exp \cos}(\Delta_n) &= \sum_{k=1}^n e^{H(k+1/2)} \left(\cos H \left(k + \frac{1}{2} \right) \right) \frac{c}{n} \\
&= \frac{c}{2n \sin(c/(2n))} \sum_{k=1}^n e^{H(k+1/2)} \{ \sin H(k+1) - \sin H(k) \} \\
&= \frac{c}{2n \sin(c/(2n))} \sum_{k=1}^n \{ e^{H(k+1/2)} \sin H(k+1) - e^{H(k-1/2)} \sin H(k) \} \\
&\quad - \frac{c}{2n \sin(c/(2n))} \sum_{k=1}^n \{ e^{H(k+1/2)} - e^{H(k-1/2)} \} \sin H(k) \\
&= \frac{c}{2n \sin(c/(2n))} \{ e^{H(n+1/2)} \sin H(n+1) - e^{H(1/2)} \sin H(1) \} \\
&\quad - \frac{1}{2 \sin(c/(2n))} \{ e^{c/(2n)} - e^{-c/(2n)} \} \sum_{k=1}^n e^{H(k)} (\sin H(k)) \frac{c}{n}
\end{aligned}$$

この最後の和は $S_{\exp \sin}(\Delta_n)$ なので、結局次の式が得られたことになる。

$$\begin{aligned}
S_{\exp \sin}(\Delta_n) &= \frac{c/(2n)}{\sin(c/(2n))} \left\{ e^{H(1)} \cos H \left(\frac{1}{2} \right) - e^{H(n+1)} \cos H \left(n + \frac{1}{2} \right) \right\} \\
&\quad + \frac{e^{c/(2n)} - e^{-c/(2n)}}{2 \sin(c/(2n))} S_{\exp \cos}(\Delta_n), \\
S_{\exp \cos}(\Delta_n) &= \frac{c/(2n)}{\sin(c/(2n))} \{ e^{H(n+1/2)} \sin H(n+1) - e^{H(1/2)} \sin H(1) \}
\end{aligned} \tag{90}$$

$$- \frac{e^{c/(2n)} - e^{-c/(2n)}}{2 \sin(c/(2n))} S_{\expsin}(\Delta_n) \quad (91)$$

ここで、定数 s に対して $n \rightarrow \infty$ のときに

$$H(n+s) = a + \frac{c(n+s)}{n} = a + c + \frac{cs}{n} \rightarrow a + c = b, \quad H(s) = a + \frac{cs}{n} \rightarrow a$$

であり、また

$$\frac{e^{c/(2n)} - e^{-c/(2n)}}{2 \sin(c/(2n))} = e^{-c/(2n)} \frac{e^{c/n} - 1}{c/n} \frac{c/(2n)}{\sin(c/(2n))} \rightarrow 1$$

となるので、(90),(91) で $n \rightarrow \infty$ とすると、

$$\begin{aligned} I_{\expsin}(a, b) &= e^a \cos a - e^b \cos b + I_{\expcos}(a, b), \\ I_{\expcos}(a, b) &= e^b \sin b - e^a \sin a - I_{\expsin}(a, b) \end{aligned}$$

より、結局、

$$I_{\expsin}(a, b) = \frac{e^b}{2}(\sin b - \cos b) - \frac{e^a}{2}(\sin a - \cos a) \quad (92)$$

$$I_{\expcos}(a, b) = \frac{e^b}{2}(\sin b + \cos b) - \frac{e^a}{2}(\sin a + \cos a) \quad (93)$$

が得られる。

17 最後に

本稿で計算した定積分は、当然いずれの場合も原始関数による定積分 (1) の形にもなっている。これらの原始関数は、本稿では極限は用いるが微分は使わずに「区分求積」で求めたことになる。置換積分や部分積分に相当するものも、この方法でそれなりに取り扱えることもわかった。

ただ、もちろん本稿のようなやり方は、通常の積分より相当面倒で、やはり微分を先に導入し、その逆演算として原始関数を定義して、その差として定積分を導入する現代的な微積分の教育方法の方がはるかによい。

ちなみに、元々定積分の考え方は微分より前に存在していたので、もしかしたら本稿のような計算のうち幾つかは、微分ができる前に得られていたのかもしれない。とすると、簡単なものについては「導関数」よりも先に「原始関数」があった可能性もゼロではないように思う。

参考文献

- [1] 竹野茂治「指数関数の定義について」(2017)
<http://takeno.iee.niit.ac.jp/~shige/math/lecture/basic1/basic1.html#exponential>