2005 年 10 月 15 日
(2011 年 06 月 24 日修正)

対数グラフとは

新潟工科大学 情報電子工学科 竹野茂治

1 対数グラフ

対数グラフとは、その軸が **対数軸** であるようなグラフを指し (通常は 2 次元のグラフ)、縦横の一方の軸のみが対数軸である **片対数グラフ**、及び両軸とも対数軸である **両対数グラフ** の 2 種類がある。

2 対数軸とは

対数軸とは、軸の目盛りが図 1 のように、等間隔に見るとそれらが等比数列となっているものを指す。

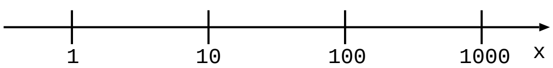

図 1: 対数軸

軸を見ると「対数的」というよりもむしろ「指数的」にも見えるが、なぜこれを「対数軸」と呼ぶのであろうか。

今、対数軸上の実際の値、すなわち対数軸の目盛りに沿った値を x とし、軸の目盛りとは無関係な、見かけ上の位置を X とすると (図 2)、X の増え方に対して x は指数的に増加する。例え

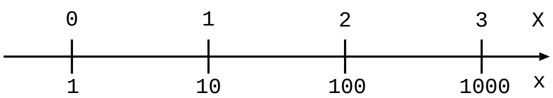

図 2: 対数軸と見かけの位置

ば図 2 の場合、x と X の関係を式で表せば $x = 10^X$ となり、逆に見れば、見かけの位置 X は

$$X = \log_{10} x \tag{1}$$

となることになる。これによりこの軸では、

実際の値 (x) を、対数を取った見かけの位置 (X) に配置する

こととなる。このように、値を対数的に配置するので「対数軸」と呼ばれているのである。

なお、普通の軸でも、軸の目盛りの値を 2 倍にすれば、位置は 1/2 倍になるし (図 3)、目盛り

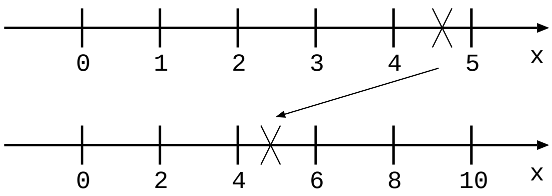

図 3: 軸の目盛りを 2 倍

を 2 増やせば、位置は 2 左にずれる (図 4)。

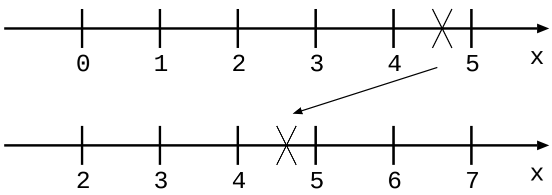

図 4: 軸の目盛りを 2 増やす

このように、軸の目盛りの値を変更することは、位置を逆に動かすことに相当するので、軸の目盛りを指数的に変化すると、見かけの位置は逆に対数的に移ることになるわけである。

3 対数グラフ

ここでは、対数グラフがどういう点に優れていて、どういう場面で使われるのかを説明する。

実験のデータ等をグラフに取っていくと、それに何らかの規則があれば、多少誤差が含まれていてもその様子がぼんやり見えてくる (図 5)。

しかし、その関係が曲線である場合、それがどんな式にあてはまるのかを見い出すことは容易ではない (図 6)。

例えばそれが $y = Ax^2$ のように x^2 に比例する関係なのか、$y = Bx^3$ のように x^3 に比例する関係なのかを目で見極めることは非常に難しいし、さらにそのデータに誤差が含まれていることを考えると、それを行なうのは現実的ではない。

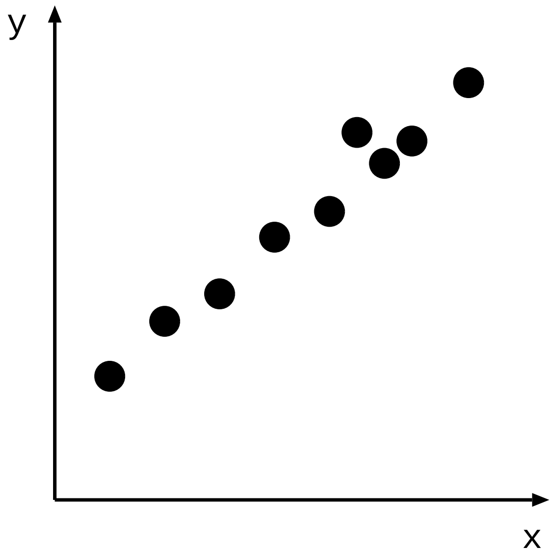

図 5: 実験データのグラフ

しかし、これを両対数グラフに書くと、その見かけの位置は、

$$X = \log_{10} x, \quad Y = \log_{10} y$$

なので、例えば $y = Ax^2$ という関係の場合、両対数グラフでの見かけの位置は

$$\begin{aligned} Y &= \log_{10} y = \log_{10} Ax^2 = \log_{10} A + \log_{10} x^2 = \log_{10} A + 2\log_{10} x \\ &= 2X + \log_{10} A \end{aligned}$$

となり、すなわち $y = Ax^2$ の両対数グラフでの見かけのグラフは「傾きが 2 の直線」となる。

同様に、$y = Bx^3$ のグラフも、両対数グラフでは見かけは「傾きが 3 の直線」になり、結局これらは両対数グラフの直線になり、そしてその違いはその直線の傾きで知ることができるようになる。これならば、人間の目でもおおまかに知ることは可能である (統計的に定量的に知るための「相関係数」というものもある)。

ジップの法則のように $y = a/x$ という関係の場合は、$y = ax^{-1}$ なので、または

$$Y = \log_{10} y = \log_{10} \frac{a}{x} = \log_{10} a - \log_{10} x = -X + \log_{10} a$$

より、両対数グラフでは傾きが -1 のグラフになる。

また、自然現象、工学現象では、$y = A \times B^x$ のような指数関数の関係が現れることも多い。この場合は、y 軸が対数軸である片対数グラフで見るとその見かけの位置 (x, Y) は、

$$Y = \log_{10} y = \log_{10} A \times B^x = \log_{10} A + \log_{10} B^x = \log_{10} A + x \log_{10} B$$

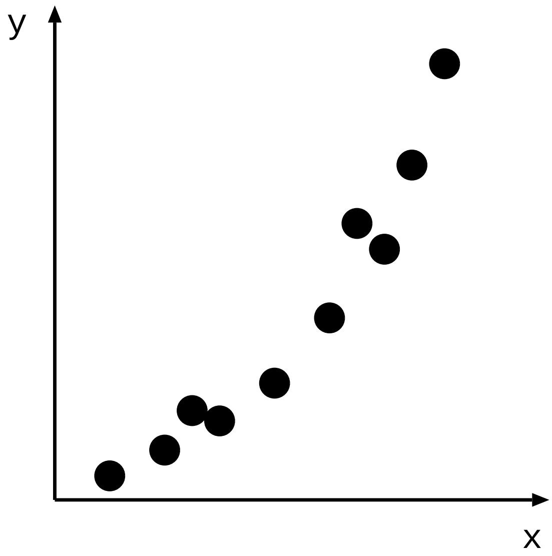

図 6: 曲線的な関係

となり、この片対数グラフでは傾き $\log_{10} B$ の直線になることになる。

4 最後に

これまで述べたように、対数グラフは、工学や多くの自然現象で現れやすい $y = Ax^{\alpha}$ や $y = A \times B^{x}$ のような関係式や、それに基づく誤差を含んだデータを直線として見るために使われるものである。

今回のジップの法則も、それに当てはまるか当てはまらないかを確かめるには、通常の軸のグラフでは正しくは判別し難く、両対数グラフが威力を発揮する例になっている。