2018 年前期

行列 (基礎数理 III 講義資料)

(http://takeno.iee.niit.ac.jp/%7Eshige/math/lecture/basic3/hwsol/2018/matrix1.pdf)

1 行列の定義

- **行列** = 数字 (実数、または複素数) を長方形の形に並べたもの。

  例 1: $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \\ 1 & -7 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & -2 \\ 1/3 & \log 2 & \pi \end{bmatrix}$

  行列はアルファベットの大文字 (細字) で表すことが多い。

- 一般の行列:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{1}$$

- 成分、行、列に関する用語:
  - **成分** = 各要素
  - **行** = 横の並び。上から順に 1 行目、2 行目、...、m 行目、と数える。
  - **列** = 縦の並び。左から順に 1 列目、2 列目、...、n 列目、と数える。
  - $\boldsymbol{m \times n}$ **行列** = m 行 n 列の行列
  - $\boldsymbol{(i,j)}$ **成分** = i 行目、j 列目の成分 (a_{ij})

    a_{ij} の 2 重添字は、通常 $a_{ij} = (i,j)$ 成分 (i が行、j が列) となるように書く。
  - **スカラー** = 行列に対して、単なる数 (実数、または複素数) のこと。

問 1 (1) 例 1 の行列のサイズをそれぞれ答えよ。
(2) 例 1 の行列の (2,1) 成分をそれぞれ答えよ。

- 行列に関する用語:
  - **零 (ゼロ) 行列** = すべての成分が 0 の行列。$O_{m,n}$ ($m \times n$ 行列)、または単に O と書く。
  - **(n 次) 正方行列** = $n \times n$ 行列
  - **対角成分** = 正方行列の左上から右下への成分 $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$
  - **対角行列** = 対角成分以外が全部 0 の正方行列
  - **(n 次) 単位行列** = 対角成分が全部 1 の対角行列。E_n、または単に E と書く。

$$E = E_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  - **(n 次元) 行ベクトル** = $1 \times n$ 行列 (1 行のみの行列)
    (n 次元) 列ベクトル = $n \times 1$ 行列 (1 列のみの行列)
    行ベクトル、列ベクトルは、ベクトルのように小文字のアルファベットの太字で書くこともある。
    また、行ベクトルは、ベクトルの成分のように $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ の形式 (カンマ区切り) で書くこともある。
  - 注意 1×1 行列 $[a]$ はスカラー a と同じと見なす ($[a] = a$)。

問 2 (1) 行列 E_4 を書き上げよ。(2) 行列 $O_{4,2}$ を書き上げよ。

- 行列の省略/分解記法: 例えば $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ に対して、
  - A の各行ベクトルを $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$, $A_3 = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ とするとき、A を $A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix}$ と書く。
  - A の各列ベクトルを $B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}$, $B_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix}$, $B_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}$ とするとき、A を $A = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \end{bmatrix}$ と書く。

- ○ A の部分的な行列を $C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$, $C_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$, $C_3 = \begin{bmatrix} 7 & 8 \end{bmatrix}$, $C_4 = 9$ とするとき、A を $A = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{bmatrix}$ と書く。
- ○ (1) のように要素が a_{ij} で表される $m \times n$ 行列を簡単に $A = [a_{ij}]_{m,n}$ と書く。
- ○ 対角行列のように左下半分の成分が 0 だったり、右上半分が 0 だったりする部分をまとめて以下のように書く (通常は 0 のみまとめ書きされる)。

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & & & \text{\huge O} \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ \text{\huge O} & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

問 3 (1) $a_{ij} = |i - j|$ のとき、$A = [a_{ij}]_{3,3}$ を書き上げよ。
(2) $A = [(-1)^{i+j}]_{2,3}$ を書き上げよ。
(3) 3×2 行列 A の j 行目の行ベクトルが $A_j = \begin{bmatrix} 2j & 1 - j^2 \end{bmatrix}$ のとき、A を書き上げよ。

2 行列の相等、和、差、スカラー倍

- 行列 A, B が **等しい** ($\boldsymbol{A = B}$) とは、A と B のサイズが同じで、かつ対応するすべての成分が等しいこと。

  すなわち、$A = [a_{ij}]_{m,n}$、$B = [b_{ij}]_{p,q}$ のとき $A = B$ となるのは、$m = p$, $n = q$ でかつすべての i, j に対して $a_{ij} = b_{ij}$ となること。

問 4 (1) $\begin{bmatrix} x+2 & y^2 \\ 2z-3 & 3w^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$ のとき、x, y, z, w の値を求めよ。
(2) $\begin{bmatrix} 4x+2y \\ 3x-2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix}$ のとき、x, y の値を求めよ。

- 行列 A, B の **和** $\boldsymbol{A + B}$、および **差** $\boldsymbol{A - B}$ は、A と B のサイズが同じ場合のみ定め、それぞれ対応する成分同士の和、差とする。

  すなわち、$A = [a_{ij}]_{m,n}$、$B = [b_{ij}]_{p,q}$ のとき、$m = p$, $n = q$ のときのみ和、差があり、

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m,n}、A - B = [a_{ij} - b_{ij}]_{m,n}$$

- 行列 A とスカラー p に対し、**スカラー倍 pA** は、すべての成分を p 倍した行列とする:

$$pA = p[a_{ij}]_{m,n} = [pa_{ij}]_{m,n}$$

$(-p)A$ を $-pA$、$(-1)A$ を $-A$ と書く。

- 和、差、スカラー倍の性質 (A, B, C: $m \times n$ 行列, p, q: スカラー):
  1. $A + B = B + A, \quad (A + B) + C = A + (B + C)$
  2. $(p + q)A = pA + qA, \quad p(A + B) = pA + pB, \quad p(qA) = (pq)A$
  3. $O_{m,n} + A = A, \quad -A + A = O_{m,n}$
  4. $0A = O_{m,n}\ , \quad pO_{m,n} = O_{m,n}\ , \quad 1A = A$

問 5 $A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 7 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}$ のとき、以下が定義されないなら「ない」と答え、定義される場合はそれを求めよ。
(1) $A + B$ (2) $A + C$ (3) $B + D$ (4) $A - C$ (5) $C - D$ (6) $3D$
(7) $-\sqrt{3}B$ (8) $3C-2A$ (9) $A+B-(B+C)$ (10) $3(-2A+5C)-2(4C-3A)$

3 行列の積

- 行列の積 $\neq$ 対応する成分同士の積
- $A = [a_{ij}]_{m,n}$ が $\underline{m \times n}$ 行列、$B = [b_{ij}]_{n,p}$ が $\underline{n \times p}$ 行列のとき、すなわち A の行のサイズと B の列のサイズが等しい場合のみ **積 AB** を定め、$C = AB = [c_{ij}]_{m,p}$ は $\underline{m \times p}$ 行列で、c_{ij} は以下で定義する。

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} \tag{2}$$

- 積 AB の計算手順
  1. A を m 個の行 (n 次行ベクトル) に、B を p 個の列 (n 次列ベクトル) に分割する (図 1)。
  2. 図 1 のように、A の i 行目 (上から i 番目の行) の成分と、B の j 列目 (左から j 番目の列) の成分を矢印の方向に順番にかけて足したもの (= 式 (2)) を AB の (i, j) 成分 (上から i 番目、左から j 番目の成分) とする。

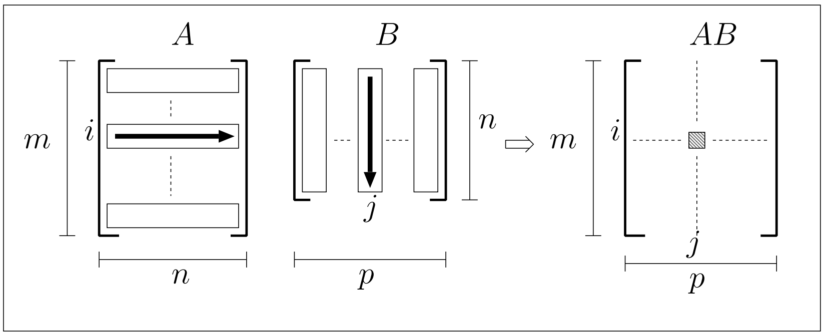

図 1: 行列の積

3. その作業をすべての i, すべての j の組 ($m \times p$ 通り) で行う。

例 2:

$$\left[\begin{array}{cc} a & b \\ \hline c & d \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} p \\ q \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} ap+bq \\ cp+dq \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cc} 1 & 3 \\ \hline 5 & -7 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} 2 & -4 \\ 8 & -3 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} 2+24 & -4-9 \\ 10-56 & -20+21 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} 26 & -13 \\ -46 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cc} 3 & 4 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} 2 & 5 \\ -6 & 7 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} 6-24 & 15+28 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} -18 & 43 \end{array}\right]$$

問 6　4×3 行列 A, 2×5 行列 B に対して、AC と CB がともに存在するとき、行列 C のサイズを求めよ。

問 7　問 5 の行列に対して、次の積が定義されないなら「ない」と答え、定義される場合はそれを求めよ。 (1) AD (2) DA (3) AC (4) CA (5) BC (6) CB

問 8　$A = \left[\begin{array}{ccc} 3 & 2 & -4 \end{array}\right]$、$B = \left[\begin{array}{c} -2 \\ -5 \\ 1 \end{array}\right]$ に対して、AB と BA を求めよ。

- 零行列、単位行列との積 (A: $m \times n$ 行列):

$$OA = AO = O \ \text{(詳しくは、} O_{p,m}A = O_{p,n}\text{、} AO_{n,p} = O_{m,p}\text{)} \tag{3}$$

$$EA = AE = A \ \text{(詳しくは、} E_m A = AE_n = A\text{)} \tag{4}$$

問 9 $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ \sqrt{7} & -4 & 3/4 \end{bmatrix}$ に対して、

(1) AE_n が存在するときの n を求め、そのときの AE_n を計算せよ。

(2) E_nA が存在するときの n を求め、そのときの E_nA を計算せよ。

- 積の性質 (A, B, C: 行列, p, q: スカラー、いずれも積が定義できる場合)
  1. $(pA)B = A(pB) = p(AB)$
  2. $A(B+C) = AB + AC$, $(A+B)C = AC + BC$ (分配法則)
  3. $(AB)C = A(BC)$ (結合法則)

問 10 $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -5 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ に対して、結合法則 $(AB)C = A(BC)$ が成り立つことを確認せよ。

問 11 n 次の正方行列 A, B に対して、$C = (2B - 7E)(3A + 5E)$ を展開して、A, B, E で表せ。

- 交換法則 $AB = BA$ は一般に成り立たない。
  - (ア) AB があっても BA があるとは限らない。
  - (イ) AB と BA があっても、両者のサイズが等しいとは限らない。
  - (ウ) AB と BA があってサイズが同じでも、両者が等しいとは限らない。

  逆に、$AB = BA$ が成り立つ A, B の組を **可換** と呼ぶ。

  n 次正方行列と E_n、及び n 次正方行列と $O_{n,n}$ とは常に可換。
- $A \neq O$, $B \neq O$ でかつ、$AB = O$ となる場合がある。

問 12 $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ に対し、A と X が可換ならば、$X = pA + qE$ というスカラー p, q が存在することを示せ。

- n 次正方行列同士は積が常に計算できて、積も n 次正方行列となる。

- n 次正方行列 A に対して、A の k 乗 A^k ($k \geq 0$: 整数) を、

$$A^0 = E_n,\ \ A^1 = A,\ \ A^2 = AA,\ \ A^k = A^{k-1}A\ (k \geq 2), \tag{5}$$

と定める。

例 3: $A^3 = A^2A = AA^2 = AAA$、$A^4 = A^3A = AA^2A = AA^3 = A^2A^2 = AAAA$

- 0 以上の整数 k, m に対して、
  - A^k と A^m は常に可換
  - $A^{k+m} = A^kA^m = A^mA^k$
  - $(A^k)^m = (A^m)^k = A^{km}$

問 13 A と B が可換ならば、$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ となること、および可換でなければそれが成り立たないことを示せ。

- ケーリー・ハミルトンの公式: $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ に対して、

$$A^2 - (a+d)A + (ad - bc)E = O \tag{6}$$

問 14 $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ に対して、 (1) ケーリー・ハミルトンの公式が成り立つことを確認せよ。 (2) (1) の結果を利用し、A^3, A^4 を求めよ。

- 行列の積の応用 (多変数の一次式):
  - (x_1, y_1) から (x_2, y_2) への一次関係式

$$\begin{cases} x_2 &= ax_1 + by_1 \\ y_2 &= cx_1 + dy_1 \end{cases}$$

は、

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax_1 + by_1 \\ cx_1 + dy_1 \end{bmatrix}$$

より、行列を用いて

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

と書くことができる。

○ さらに、(x_2, y_2) から (x_3, y_3) への一次関係

$$\begin{cases} x_3 &= px_2 + qy_2 \\ y_3 &= rx_2 + sy_2 \end{cases}, \text{ すなわち } \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

がある場合は、

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \right) \\ &= \left(\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \quad \text{(結合法則)} \\ &= \begin{bmatrix} pa + qc & pb + qd \\ ra + sc & rb + sd \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

となり、すなわち (x_1, y_1) から (x_3, y_3) への一次関係式 (合成変換) が、行列の積で表される (求められる) ことになる。

○ 連立方程式:

$$\begin{cases} ax + by &= p \\ cx + dy &= q \end{cases}$$

も、同様に行列の積

$$AX = B \quad \left(A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}、B = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}、X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right)$$

で表すことができる。A は連立方程式の係数からなる行列、B は方程式の右辺からなる列ベクトル、X は未知数からなる列ベクトル。

○ m 変数から n 変数への一次関係式、あるいは m 元の連立方程式も、同様に行列の積を用いて書くことができる:

$$Y = AX、\quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}、Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}、A = [a_{ij}]_{m,n} \tag{7}$$

$$AX = B、\quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}、B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}、A = [a_{ij}]_{m,n} \tag{8}$$

○ 一次変換: xy 平面上の点 (x, y) から点 (x', y') への変換が、

$$\begin{cases} x' &= ax + by \\ y' &= cx + dy \end{cases}$$

のような 1 次式で表される場合、この変換を **一次変換** と呼ぶ。一次変換は行列により、

$$X' = AX、X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}、X' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}、A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

と表される。原点を通る直線に関する対称変換、x 方向、y 方向の拡大/縮小、原点の回りの回転変換などがこの形で書かれ、よってそれらの組み合わせも行列の積で表され、一次変換となる。

原点の回りの θ 回転を表す行列 $A = A(\theta)$ は、**回転行列** と呼ばれる。

$$A(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

3 次元空間の一次変換もあり、CG などで多用されている。

◦ 数列の 3 項漸化式:

$$a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n \ (n \geq 0),\ \ a_0 = \alpha,\ \ a_1 = \beta \tag{9}$$

は、$X_n = \begin{bmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{bmatrix}$ とすると、

$$X_{n+1} = \begin{bmatrix} a_{n+1} \\ a_{n+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{n+1} \\ pa_{n+1} + qa_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{bmatrix} = AX_n$$

と行列形の漸化式に書き直せる。これにより、

$$X_n = AX_{n-1} = A(AX_{n-2}) = A^2X_{n-2} = \cdots = A^nX_0 = A^n \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

となり、一般項 X_n が行列の n 乗で表されることになる。

問 15 次の連立方程式を行列で表せ。

(1) $\begin{cases} 2x + 3y & = -3 \\ x + 4y & = 1 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} s + 3t - u & = 10 \\ t + u + 2s & = 7 \\ 3u + 3s - 2t & = 2 \end{cases}$

4 逆行列

- n 次正方行列 A の **逆行列**: $AX = XA = E_n$ を満たす n 次正方行列 X のこと。A の逆行列を A^{-1} と書く。

例 4: $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
なので、$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

- すべての正方行列が逆行列を持つとは限らない。逆行列を持つ行列を **正則** であるという。例えば O^{-1} はない $(OX = O \neq E)$ が、零行列以外にも正則でない正方行列はある。

問 16 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ は逆行列を持たないことを示せ。

- A が正則の場合、A^{-1} はひとつしか存在しない。
- 実は、正方行列 A, X に対し、$AX = E$ か $XA = E$ の一方が成り立てば、A が正則でかつ $X = A^{-1}$ であることが示される (が、証明は易しくない)。
- $EE = E$ より $E^{-1} = E$
- 逆行列の性質 (A, B: n 次正方行列、$k \neq 0$: スカラー):
  1. A が正則ならば A^{-1} も正則で、$(A^{-1})^{-1} = A$
  2. A が正則ならば kA も正則で、$(kA)^{-1} = \dfrac{1}{k}A^{-1}$
  3. A, B が正則ならば AB も正則で、$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

  注意 $(A+B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1}$ (スカラーでも $(2+3)^{-1} \neq 2^{-1} + 3^{-1}$)

問 17 (1) A, B が正則のとき、$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = (B^{-1}A^{-1})(AB) = E$ となることを示せ。 (2) A が正則、B が同じ次数の正方行列のとき、$(A^{-1}BA)^3 = A^{-1}B^3A$ となることを示せ。

- 正の整数 k に対して $A^{-k} = (A^{-1})^k$ と定めると $A^{-k} = (A^k)^{-1}$ であり、任意の整数 ℓ, m に対して以下が成り立つ。
  - $(A^{-1})^{\ell} = (A^{\ell})^{-1}$
  - A^{ℓ} と A^m は常に可換

- $A^{\ell+m} = A^\ell A^m = A^m A^\ell$
- $(A^\ell)^m = (A^m)^\ell = A^{\ell m}$

- 2 次の正方行列 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ に対して、「A が正則 $\iff$ $ad - bc \neq 0$」で、このとき、

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \tag{10}$$

問 18 (1) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}^{-1}$ を求めよ。(2) $\begin{bmatrix} 3 & x \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ が正則でないとき、x の値を求めよ。

- n 次正方行列 A が正則で $AX = B$ のとき、$X = A^{-1}B$ となる。
$(A^{-1}B = A^{-1}(AX) = (A^{-1}A)X = EX = X)$
これにより、連立方程式を逆行列と行列の積で機械的に解くことができる (原理的には)。
例 5: 連立方程式 $\begin{cases} 2x + y & = 7 \\ 3x + 2y & = 9 \end{cases}$ を行列で表すと、$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \end{bmatrix}$
となるので (両辺に左から A^{-1} をかけると)、

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 - 9 \\ -21 + 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}$$

よって、$x = 5, y = -3$。

問 19 問 15 (1) の連立方程式を、逆行列を用いて解け。

5 転置行列

- $m \times n$ 行列 $A = [a_{ij}]_{m,n}$ の **転置行列** とは、A の行と列 (横と縦) を入れかえた $n \times m$ 行列のこと。A の転置行列を ${}^tA$ と書く。すなわち、${}^tA = [a_{ji}]_{n,m}$
<u>注意</u> A の転置行列を ${}^TA$ や A^T と書く本もある。

- 性質 $(A, C\colon m \times n$ 行列、$B\colon n \times p$ 行列、k: スカラー$)$:

  1. ${}^t({}^tA) = A$
  2. ${}^t(kA) = k\,{}^tA$
  3. ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$
  4. ${}^t(A \pm C) = {}^tA \pm {}^tC$

- n 次正方行列 A に対して、正の整数 k に対して ${}^t(A^k) = ({}^tA)^k$
  (上の 3. を繰り返して示される)

- A が正則ならば ${}^tA$ も正則で、$({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$
  (証明: ${}^tA\,{}^t(A^{-1}) = {}^t(A^{-1}A) = {}^tE = E$、${}^t(A^{-1})\,{}^tA = {}^t(AA^{-1}) = {}^tE = E$)

問 20 (1) $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$、$B = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ に対して、${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$ が成り立つことを確認せよ。

- n 次正方行列 A に対して、

  - **対称行列**: ${}^tA = A$ となる正方行列。対角線に関して成分が対称な行列。
  - **交代行列**: ${}^tA = -A$ となる正方行列。対角成分が 0 で、対角線に関して対称な場所の成分は符号が逆な行列。
  - **直交行列**: ${}^tA = A^{-1}$ となる行列 $({}^tAA^{-1} = E)$。

問 21 (1) $X = {}^tAA$ は対称行列であることを示せ。 (2) A が正方行列のとき、$Y = A + {}^tA$ は対称行列であることを示せ。 (3) A が正方行列のとき、$Z = A - {}^tA$ は交代行列であることを示せ。

- 3 次の正方行列

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} \end{bmatrix}$$

に対し、3 次元ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ の三重積を $D = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}$ とすると、
「A が正則 $\iff$ $D \neq 0$」で、このとき、

$$A^{-1} = \frac{1}{D} {}^{t}\begin{bmatrix} \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \end{bmatrix} \tag{11}$$

注意 本来は、3 次も含めて n 次の逆行列は、「行列式」の理論で扱うべき内容 (本稿では行列式は扱わない)。

問 22 $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ の逆行列を、(11) を用いて求め、$A^{-1}A = E$ が成り立つことを確認せよ。

問の略解

問 1　(1) 2×2 行列、3×2 行列、2×3 行列 (2) 0, 4, 1/3

問 2　(1) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

問 3　(1) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -3 \\ 6 & -8 \end{bmatrix}$

問 4　(1) $x = 1,\ y = \pm\sqrt{6},\ z = \dfrac{5}{2},\ w = \pm\sqrt{3}$ (2) $x = 2,\ y = -1$

問 5　(1) ない (2) $\begin{bmatrix} 2 & 9 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$ (3) ない (4) $\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -5 & -5 \end{bmatrix}$ (5) ない (6) $\begin{bmatrix} 21 \\ 6 \end{bmatrix}$
(7) $\begin{bmatrix} -3\sqrt{3} & -7\sqrt{3} \end{bmatrix}$ (8) $\begin{bmatrix} -9 & -8 \\ 10 & 13 \end{bmatrix}$ (9) ない (10) $7C = \begin{bmatrix} -7 & 14 \\ 0 & 21 \end{bmatrix}$

問 6　3×2 行列

問 7　(1) $\begin{bmatrix} 35 \\ -39 \end{bmatrix}$ (2) ない (3) $\begin{bmatrix} -3 & 27 \\ 5 & -16 \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} -13 & -11 \\ -15 & -6 \end{bmatrix}$
(5) $\begin{bmatrix} -3 & 27 \end{bmatrix}$ (6) ない

問 8　$AB = -6 - 10 - 4 = -20$ (1×1 行列はスカラー)、
$BA = \begin{bmatrix} -6 & -4 & 8 \\ -15 & -10 & 20 \\ 3 & 2 & -4 \end{bmatrix}$

問 9　(1) $n=3$、計算は略 (A になる)　(2) $n=2$、計算は略 (A になる)

問 10　$AB=\begin{bmatrix} 13 & -5 & 9 \\ -24 & 4 & 3 \end{bmatrix}$、$(AB)C=\begin{bmatrix} 47 & -46 \\ -92 & 30 \end{bmatrix}$、
$BC=\begin{bmatrix} 3 & -10 \\ -19 & 8 \end{bmatrix}$、$A(BC)=\begin{bmatrix} 47 & -46 \\ -92 & 30 \end{bmatrix}$

問 11　$6BA-21A+10B-35E$

問 12　$X=\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$ として $AX=XA$ とすると $y=2z$、$x-w=7z$ が得られ、$X=\begin{bmatrix} w+7z & 2z \\ z & w \end{bmatrix}=zA+(w+4z)E$ となる。

問 13　$(A+B)^2=(A+B)(A+B)=AA+AB+BA+BB=A^2+AB+BA+B^2$ なので、$AB=BA$ ならば $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$ となるが、$AB\neq BA$ ならば、$(A+B)^2-(A^2+2AB+B^2)=BA-AB\neq O$ より等しくならない。

問 14　(1) $A^2=\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}=5E$, $a+d=0$, $ad-bc=-5$ より成り立つ。 (2) $A^3=A^2A=5EA=5A=\begin{bmatrix} 15 & -20 \\ 5 & -15 \end{bmatrix}$、
$A^4=A^2A^2=25E^2=25E=\begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 25 \end{bmatrix}$

問 15　(1) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$　(2) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s \\ t \\ u \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 10 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix}$

問 16　$AX=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} p & q \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ なので、AX はどんな $p,\ q,\ r,\ s$ に対しても単位行列にはなりえない。よって A は正則ではない。

問 17 (1) $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AEA^{-1} = AA^{-1} = E$、もう一方も同様。
(2) $(A^{-1}BA)^2 = (A^{-1}BA)(A^{-1}BA) = A^{-1}B(AA^{-1})BA = A^{-1}BEBA = A^{-1}BBA = A^{-1}B^2A$、これに $(A^{-1}BA)$ をかけて同様にすれば与式が得られる。

問 18 (1) $\begin{bmatrix} 1/11 & 2/11 \\ 4/11 & -3/11 \end{bmatrix}$ (2) $x = -\dfrac{3}{2}$

問 19 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} = \dfrac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$、
よって $x = -3,\ y = 1$

問 20 略 $({}^t(AB) = {}^tB{}^tA = \begin{bmatrix} ax+by & cx+dy \end{bmatrix})$

問 21 (1) ${}^tX = {}^t({}^tAA) = {}^tAA = X$ より X は対称行列
(2) ${}^tY = {}^t(A + {}^tA) = {}^tA + A = Y$ より Y は対称行列
(3) ${}^tZ = {}^t(A - {}^tA) = {}^tA - A = -Z$ より Z は交代行列

問 22 各行の行ベクトルを $\boldsymbol{a} = (3,2,1),\ \boldsymbol{b} = (0,-1,4),\ \boldsymbol{c} = (0,0,2)$ とすると、$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = (9,-12,-3)$、$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c} = (-2,0,0)$、$\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a} = (-4,6,0)$、
$D = (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} = -6$ より

$$A^{-1} = \frac{1}{-6}\,{}^t\!\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -4 & 6 & 0 \\ 9 & -12 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & -3/2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$