宿 22

(3) $y' - \frac{y}{x} = x^3$ $\left(y' = \frac{y}{x} + x^3 \leftarrow \text{線形型} \right)$

両辺 t 倍 $ty' \boxed{-\frac{t}{x}} y = x^3 t$

$ty' + \boxed{t'} y = (ty)'$ より

$t' = -\frac{t}{x}$ であれば同じ式。 $t = x^{-1} = \frac{1}{x}$ はこれを満たす

$t' = \alpha \frac{t}{x} \Rightarrow t = x^{\alpha}$ がひとつの解

ので、よって $(ty)' = x^3 t$ より $\left(\frac{y}{x}\right)' = x^3 \times \frac{1}{x} = x^2$

$\therefore \frac{y}{x} = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$ $\underline{y = \frac{x^4}{3} + Cx}$ (一般解)

(4) $y' - 3y = e^{-x}$ $\left(y' = 3y + e^{-x} \leftarrow \text{線形型} \right)$

両辺 t 倍 $ty' \boxed{-3t} y = e^{-x} t$,

$ty' + \boxed{t'} y = (ty)'$ より

$t' = at \Rightarrow t = e^{ax}$ がひとつの解

$t' = -3t$ であれば同じ式。 $t = e^{-3x}$ はこれをみたす。

よって $(ty)' = e^{-x} t$ より $(e^{-3x} y)' = e^{-x} e^{-3x} = e^{-4x}$

$e^{-3x} y = \int e^{-4x} dx = \frac{1}{-4} e^{-4x} + C$

$\therefore y = -\frac{1}{4} \frac{e^{-4x}}{e^{-3x}} + \frac{C}{e^{-3x}} = \underline{-\frac{1}{4} e^{-x} + Ce^{3x}}$ (一般解)

宿 23. ① [ア][イ] ② [ア] ③ [ア] ④ [イ] ⑤ [ア][イ] ⑥ [ウ]

⑦ [ア] ⑧ [ウ] ⑨ [ウ] ⑩ [ウ] ⑪ [ア] ⑫ [ア][イ]

⑬ [ウ] ⑭ [ア] ⑮ [イ]

◎ n 個の関数 $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$ が <u>1次独立</u>

$\Longleftrightarrow$ どの $u_j(x)$ も、他のものの定数倍の和 にはならない
定ぎ

$\begin{cases} 1,\ x+2,\ x^2-x+1 : \text{1次独立} \\ 1,\ x+2,\ 2x-1 : \text{1次独立でない} \ (2x-1 = 2(x+1) - 3 \cdot 1) \end{cases}$

◎ (非同) $y^{(n)} + P_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \dots + P_1(x) y' + P_0(x) y = Q(x)$

(同) 〃 〃 〃 〃 $= 0$

に対し

1. ((同)の一般解) $= C_1 u_1(x) + C_2 u_2(x) + \dots + C_n u_n(x)$

($u_1 \sim u_n$: (同)の1次独立な解) ← 基本解系

2. ((非同)の一般解) = ((同)の一般解) + ((非同)の特殊解)

$= C_1 u_1 + C_2 u_2 + \dots + C_n u_n + y_0$ (特殊解 $= y_0$)

3. P_j がすべて定数 ($= a_j$) ならば、特性方程式

(特) $t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0 = 0$ (n次方程式)

の解 $t = \lambda$ に対して、 $y = e^{\lambda x}$ は (同)の解

4. (特)の n 個の解がすべて異なる ($t = \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$)

ならば $y = e^{\lambda_1 x}, \dots, e^{\lambda_n x}$ は (同)の <u>1次独立な解</u>

5. (特)の解 $t = \lambda$ が k 重解 ($2 \leq k \leq n$) ならば

$y = \underbrace{e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, x^2 e^{\lambda x}, \dots, x^{k-1} e^{\lambda x}}_{k\text{個}}$ が (同)の1次独立な解

(定数係数なら (同)は 4., 5. により解ける。 λ が複素数の場合も オイラーの公式で実数化可能。)