2021 年 06 月 25 日

広義積分の補足

新潟工科大学 基礎教育・教養系 竹野茂治

1 はじめに

本稿では、本学の基礎数理の講義で説明している「広義積分」に関する補足をいくつかまとめておく。

2 通常の積分の定義と広義積分の必要性

まず、学生から「広義積分は必要なのか」と質問されることがある。それは、例えば広義積分

$$J=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}} \tag{1}$$

は、一見普通の積分と同じように、

$$J=\int_0^1 x^{-1/2}dx=\left[2x^{1/2}\right]_0^1=2\sqrt{1}-2\sqrt{0}=2 \tag{2}$$

のように計算できてしまうことから来る話だと思う。本節では、「広義積分」という考え方がなぜ必要なのかを説明したいと思う。

普段あまり意識していないかもしれないが、通常の積分 (正確には「リーマン積分」と言う) は、「有限区間 $[a,b]$ 上」の「有界な関数」に対して定義される。それに対して「広義積分」とはそうではない積分、すなわち「有限ではない区間での積分」か、または「有界ではない関数」に対する積分である。その通常の積分の定義をまず見ておく。

以後、$-\infty<a<b<\infty$、すなわち、a,b は有限な実数値で $a<b$ であるとし、$f(x)$ は閉区間 $[a,b]$ 上で定義された関数であるする。

$[a,b]$ のひとつの分割を Δ と書く:

$$\Delta:\ a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_N=b$$

この分割は等分でなくてもよい。そして、分割の最大幅を $|\Delta|$ と書く:

$$|\Delta| = \max\{|x_j - x_{j-1}|; 1 \le j \le N\}$$

この分割の各小区間 $[x_{j-1}, x_j]$ からひとつずつ代表点 $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$ $(j = 1, 2, \ldots, N)$ を選び、リーマン和

$$S_\Delta(f) = \sum_{j=1}^{N} f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) \tag{3}$$

を作る。リーマン和 $S_\Delta(f)$ の値は、分割 Δ だけでなく代表点 ξ_j の選び方にも依存する。

分割 Δ の分割数 N を増やし、区間の幅 $|\Delta|$ を狭くしていくときに、リーマン和 $S_\Delta(f)$ が、代表点 ξ_j の選び方によらない一定の有限な値 S に収束するときに、$f(x)$ は $[a,b]$ で **積分可能である** といい、その S を $f(x)$ の $[a,b]$ での **定積分** と呼ぶ。

$$\lim_{N\to\infty, |\Delta|\to+0} S_\Delta(f) = S = \int_a^b f(x)dx \tag{4}$$

逆に、$S_\Delta(f)$ が収束しない、あるいは代表点 ξ_j の選び方で $S_\Delta(f)$ の極限が変わってしまう場合は、$f(x)$ は $[a,b]$ で **積分可能ではない** という。これが、通常の積分 (リーマン積分) の定義である。

区間が無限に広い広義積分は、この定義と同列に語れないことは容易にわかるだろうが、問題は有限区間で有界ではない関数の広義積分の方である。この定義では、$f(x)$ が有界であることには触れていないので、一見この定義は有界ではない $f(x)$ にも適用できるのではないかと思うかもしれないが、実はそうではない。

例えば、広義積分としては有限な値になることが知られている (1) の J を例に取って考える。被積分関数の $1/\sqrt{x}$ を $[0,1]$ 全体で値を持つように、例えば、

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}} & (0 < x \le 1) \\ 0 & (x = 0) \end{cases} \tag{5}$$

とし、この $f(x)$ の $[0,1]$ での定積分を考える。

この場合、リーマン和の一番左端を考えると、$\xi_1 > 0$ であれば、

$$S_\Delta(f) = \sum_{j=1}^{N} f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) \ge f(\xi_1)x_1 = \frac{x_1}{\sqrt{\xi_1}}$$

となるので、ξ_1 を 0 の近くにとればこの値はいくらでも大きくなる。つまり、$S_\Delta(f)$ が「ξ_j の取り方によらずに有限な値 S に収束すること」はなく、よって、この関数 $f(x)$ は、通常のリーマン積分の意味では $[0,1]$ で積分可能ではないことになる。

この例からわかるように、有界区間で有界ではない関数は、通常の積分の定義では積分可能ではない。よって、そのような関数の積分、すなわち無限に伸びる部分の面積を意味づけるためには、通常の積分とは違う形の定義が必要であり、その一つが広義積分なのである。

J の (2) のような形式的な計算は、結果的には広義積分と値が一致するものの、普通の積分ではないので、そのように計算してはいけない、という意味もなんとなくわかってもらえるのではないかと思う。

実は、このような有界ではない関数の積分の意味づけには、広義積分 (より正確に言えば「広義リーマン積分」) 以外にも、例えば「ルベーグ積分」と呼ばれるものがある。リーマン積分の場合は横分割で縦方向に細長い短冊を使って近似 (リーマン和) するために有界でない関数の近似には向かないのであるが、それを、むしろ縦に分割する近似を使って有界でない関数の積分を考えるのがルベーグ積分である。

ルベーグ積分には、有界ではない関数だけでなく、積分範囲が有限ではない積分も区別なく扱えるというメリットもあるが、広義リーマン積分とルベーグ積分が常に同じ値になる、というわけではないし、学ぶのがかなり難しいというデメリットもある。

3 広義積分の種類

広義積分 (広義リーマン積分) は、有界でない関数、または無限に長い区間での積分であり、基本的なものには次の 4 種類がある。以後、$-\infty<a<b<\infty$ とする。

- $f(x)$ が $[a,b)$ 上の関数で、$a<t<b$ なる任意の t に対して $[a,t]$ 上 $f(x)$ は有界でかつ積分可能で、$[a,b)$ では有界ではない場合、

$$I^b=\int_a^b f(x)dx=\lim_{t\to b-0}\int_a^t f(x)dx \tag{6}$$

- $f(x)$ が $(a,b]$ 上の関数で、$a<s<b$ なる任意の s に対して $[s,b]$ 上 $f(x)$ は有界でかつ積分可能で、$(a,b]$ では有界ではない場合、

$$I_a=\int_a^b f(x)dx=\lim_{s\to a+0}\int_s^b f(x)dx \tag{7}$$

- $f(x)$ が $[a,\infty)$ 上の関数で、$a<t$ なる任意の t に対して $[a,t]$ 上 $f(x)$ は有界でかつ積分可能である場合、

$$I^{\infty}=\int_a^{\infty} f(x)dx=\lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)dx \tag{8}$$

- $f(x)$ が $(-\infty,b]$ 上の関数で、$s<b$ なる任意の s に対して $[s,b]$ 上 $f(x)$ は有界でかつ積分可能である場合、

$$I_{-\infty}=\int_{-\infty}^{b} f(x)dx=\lim_{s\to-\infty}\int_s^b f(x)dx \tag{9}$$

これらのように、有限区間のリーマン積分の極限として定義されるのが広義積分 (広義リーマン積分) である。

上記の広義積分は、いずれも積分範囲の片端で通常の積分ができない場合であるが、積分範囲の両端で積分ができない「合併型」もある。その場合は、2 重極限で考えればよい。

- $f(x)$ が (a,b) 上の関数で、$x=a$, $x=b$ の近くで有界ではない場合、

$$I_a^b=\int_a^b f(x)dx=\lim_{s\to a+0,t\to b-0}\int_s^t f(x)dx \tag{10}$$

- $f(x)$ が (a,∞) 上の関数で、$x=a$ の近くで有界ではない場合、

$$I_a^{\infty}=\int_a^{\infty} f(x)dx=\lim_{s\to a+0,t\to\infty}\int_s^t f(x)dx \tag{11}$$

- $f(x)$ が $(-\infty,b)$ 上の関数で、$x=b$ の近くで有界ではない場合、

$$I_{-\infty}^b=\int_{-\infty}^b f(x)dx=\lim_{s\to-\infty,t\to b-0}\int_s^t f(x)dx \tag{12}$$

- $f(x)$ が $(-\infty,\infty)$ 上の関数である場合、

$$I_{-\infty}^{\infty}=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\lim_{s\to-\infty,t\to\infty}\int_s^t f(x)dx \tag{13}$$

これらの広義積分は、有限な 2 重極限値が存在するときのみ、その積分値が存在すると言い、それ以外は発散する、と言う。この 2 重極限について、例えば (10) を例に少し考えてみる。

$f(x)$ は (a,b) 上の関数で、$a<s<t<b$ となる任意の s,t に対し、$[s,t]$ 上 $f(x)$ は有界かつ積分可能で、(a,b) では有界ではないとする。

$a<c<b$ となる c をひとつ取って考え、(a,b) での $f(x)$ の原始関数のひとつを $F(x)$ とする。例えば、

$$F(x)=\int_c^x f(y)dy \quad (a<x<b) \tag{14}$$

とすればよい。このとき (10) は、

$$I_a^b=\lim_{s\to a+0,t\to b-0}\int_s^t f(x)dx=\lim_{s\to a+0,t\to b-0}(F(t)-F(s)) \tag{15}$$

であるから、

$$I_1=\lim_{s\to a+0}F(s),\quad I_2=\lim_{t\to b-0}F(t) \tag{16}$$

の極限値が両方とも有限値で存在する場合、(15) は存在し、$I_a^b=I_2-I_1$ となる。

逆に、(15) の有限な極限値が存在する場合、これは s,t に関する独立な極限なので、(16) の極限が両方とも存在する必要がある。つまり、(10) が存在するかどうかは、(16) の両方が存在するかどうかに一致することになる。さらにこの場合、$I_a^b=I_2-I_1$ は、(14) により、

$$\begin{aligned}
I_2-I_1 &= \lim_{t\to b-0}F(t)-\lim_{s\to a+0}F(s) = \lim_{t\to b-0}\int_c^t f(x)dx-\lim_{s\to a+0}\int_c^s f(x)dx\\
&= \lim_{s\to a+0}\int_s^c f(x)dx+\lim_{t\to b-0}\int_c^t f(x)dx\\
&= \int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx
\end{aligned} \tag{17}$$

となり、基本型の広義積分 (6), (7) の和の形に書けることになる。

つまり、(10) の 2 重極限による定義を、$a<c<b$ なるひとつの c に対して、(17) の両方の広義積分が有限値で存在するときに (17) によって定義する、としても同じことになる。実際 (10) の広義積分をそのように定義している本も多い。

なお、この c は (a,b) 内であればなんでもよく、ひとつの c に対して広義積分が存在すれば他の c に対しても当然積分は存在して同じ値になるし、ひとつの c に対して存在しなければ、他の c に対しても存在しない。

これは、(11), (12), (13) についても同様であり、

$$I_a^\infty = \int_a^\infty f(x)dx = \int_a^c f(x)dx+\int_c^\infty f(x)dx$$

$$
\begin{aligned}
I_{-\infty}^{b} &= \int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{b} f(x)dx \\
I_{-\infty}^{\infty} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{\infty} f(x)dx
\end{aligned}
$$

のように片端の広義積分の和で書け、いずれも右辺の 2 つの広義積分が両方とも存在するときに、そしてそのときに限り左辺の広義積分が存在し、両者の値は一致する。

ただし、注意しなければいけないのは、(10) の 2 重極限を、簡単にひとつにまとめて、

$$
I_a^b = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x)dx \tag{18}
$$

とやってはいけないことである。2 つの極限の近づき方が独立でないと (10) とは違うものになる。(10) が存在すれば、(18) も存在して、確かに両者は同じ値になるが、逆は必ずしもそうではなく、すなわち (18) は有限値で存在しても、(10) が存在しない例が作れる。例えば、$[0,2]$ の関数 $f(x)$ を

$$
f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & (0 < x \leq 1) \\ \dfrac{1}{x-2} & (1 < x < 2) \end{cases} \tag{19}
$$

とすると、

$$
\int_{\varepsilon}^{2-\varepsilon} f(x)dx = \int_{\varepsilon}^{1} \frac{dx}{x} + \int_{1}^{2-\varepsilon} \frac{dx}{x-2} = \int_{\varepsilon}^{1} \frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon}^{1} \frac{dt}{-t} = 0
$$

となるので (18) は存在して 0 となるが、

$$
\int_{\varepsilon}^{1} f(x)dx = \int_{\varepsilon}^{1} \frac{dx}{x} = [\log x]_{\varepsilon}^{1} = -\log\varepsilon \to \infty
$$

となるので $(0,1]$ の広義積分は存在しないし、同様に $[1,2)$ の広義積分も存在しない。よって、この $f(x)$ に対して (10) は存在しない。

なお、(10) が存在せず (18) が存在する場合、(18) を (10) の「主値」や「有限部分」などと呼ぶ場合がある。

また、もうひとつの合併型として、積分区間 $[a,b]$ の内部 c $(a < c < b)$ で有界でない場合も考えられるが、その場合は

$$
\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{b} f(x)dx
$$

と考えればよい。

合併型の広義積分の具体例としては、ベータ関数

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx \quad (p>0, q>0)$$

やガンマ関数

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt \quad (x>0)$$

などが有名である。ベータ関数は $0<p<1, 0<q<1$ のときに I_a^b 型の広義積分、ガンマ関数は $0<x<1$ のときに I_a^∞ 型の広義積分となる。

4 広義積分の簡易記法

ここ数年間、広義積分の講義では計算途中の簡易記法を紹介してきた。それをここに書き残しておく。

それは、片側極限の簡易記法

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to a+0} f(x) = f(a+0),\quad \lim_{x\to b-0} f(x) = f(b-0),\quad \lim_{x\to\infty} f(x) = f(\infty),\\ &\lim_{x\to-\infty} f(x) = f(-\infty)\end{aligned} \tag{20}$$

を利用するもので、以後 (7) を例に説明する。$f(x)$ の $(a,b]$ での原始関数を $F(x)$ とする。例えば、

$$F(x) = -\int_x^b f(y)dy$$

とでもすればよい。この場合、定義により、

$$\begin{aligned}I_a &= \int_a^b f(x)dx = \lim_{s\to a+0}\int_s^b f(x)dx = \lim_{s\to a+0}[F(x)]_s^b = \lim_{s\to a+0}(F(b)-F(s))\\ &= F(b) - \lim_{s\to a+0} F(s)\end{aligned} \tag{21}$$

となるが、この最後の式は、(20) を用いれば、形式的に以下のように書ける。

$$I_a = F(b) - F(a+0) = [F(x)]_{a+0}^b \tag{22}$$

講義で紹介した簡易記法とは、最終的にこの式を導くものである。

定義による (7) の計算 (21) の場合、最初に lim の式に書き直すが、実際にその lim の計算を行うのは原始関数を求めて、そこに代入を行った後であり、途中の計算では lim はついてるだけになる。

それに対して、(22) の $a+0$ を少し先取りし、積分範囲の a を最初に $a+0$ に変えて、原始関数への代入までは、表面上は lim を書かずに計算するのが簡易記法の方法である。すなわち、以下のように書く。

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{a+0}^b f(x)dx = [F(x)]_{a+0}^b = F(b) - \lim_{x\to a+0} F(x) \tag{23}$$

このように、最後の代入の際には極限を用いる。これなら、広義積分であることはちゃんと意識しているし、結果は (21) に一致し、正しく計算できることになる。

例えば、(1) の J の場合、定義通りに計算すると、

$$J = \lim_{s\to+0}\int_s^1 x^{-1/2}dx = \lim_{s\to+0}[2x^{1/2}]_s^1 = \lim_{s\to+0}(2\sqrt{1} - 2\sqrt{s}) = 2$$

となるが、(23) の簡易記法では、

$$J = \int_{+0}^1 x^{-1/2}dx = [2x^{1/2}]_{+0}^1 = 2\sqrt{1} - \lim_{x\to+0}(2\sqrt{x}) = 2$$

となる。特に、途中の原始関数の計算が長い場合は lim を書く手間が省ける分だけ少し楽になる。これは、(2) の計算よりは、広義積分であることを意識している分、だいぶましな書き方だと思う。

この簡易記法は、他の (6), (8), (9) の型の広義積分や、合併型の広義積分にも使える。例えば、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} = [\arctan x]_{-\infty}^{\infty} = \lim_{x\to\infty}\arctan x - \lim_{x\to-\infty}\arctan x = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

といった具合であり、(8), (9) 等の積分範囲が無限の場合は下端や上端の $a+0$, $b-0$ への書き直しも必要ない。

5 最後に

本稿では、広義積分の補足として、広義積分の必要性、合併型の広義積分、広義積分の簡易記法について紹介した。いずれも工学部向けの教科書では、広義積分にそれほど時間はかけられないため詳しく取り上げられることの少ない話で、私の講義でも、簡易記法以外はあまり紹介したことはない。

しかし工学部でも、例えば本稿で紹介したベータ関数やガンマ関数、あるいは正規分布やフーリエ変換、ラプラス変換など、広義積分はたくさん現れるし、その計算を行うには、積分の順序交換の定理、微分と積分の順序交換の定理、部分積分や置換積分といった通常の積分に対する定理の広義積分版が必要になることも多い。よって、広義積分のことを詳しく知り、その計算に慣れることは、工学部の学生にとってもそれなりに重要なことだろうと思う。

今後も何か補足があれば随時追加していきたい。