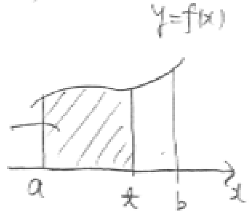
◎ 定積分が面積であること

$$\int_a^b f(x)\,dx \underset{\text{定義}}{=} F(b)-F(a) \quad (F'(x)=f(x))$$



$S(t)=$ $a \leqq x \leqq t$ の範囲で

$y=f(x)$ と x 軸が囲む面積とする。

$(a \leqq t \leqq b)$ 　 $(S(a)=0)$

このとき，

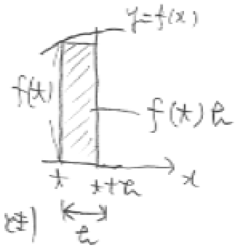
$S(t+h)-S(t)$

$=([a,\ t+h]$ 上の面積$)-([a,\ t]$ 上の面積$)$

$=[t,\ t+h]$ 上の面積

であり，$h \fallingdotseq 0$ のとき この面積は $f(t)h$ に近い（右図）

（高さ）（幅）



よって $S(t+h)-S(t) \fallingdotseq f(t)h$ $(h \fallingdotseq 0$ の時$)$

より

$\dfrac{S(t+h)-S(t)}{h} \fallingdotseq f(t)$ となるが，$h \to 0$ とするとこの誤差は

なくなり，

ゆえに $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{S(t+h)-S(t)}{h} = \underline{S'(t)=f(t)}$ が成り立つ。

つまり $S(x)$ は $f(x)$ の原始関数のひとつになるので

$F(x)=S(x)+C$ 　となる。

$\therefore F(b)-F(a)=(S(b)+C)-(\underset{\substack{\shortparallel\\0}}{S(a)}+C)=\underline{S(b)}$

$=\underline{[a,b]\text{ 上の面積}}$

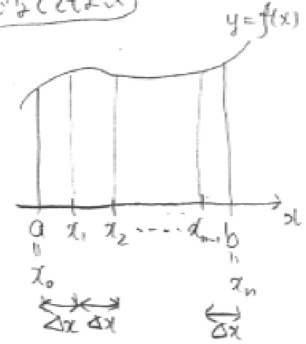
◎ 区分求積法（大学流の積分）← 長方形での近似の極限

$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \quad (a<b)$

本当は等分でなくてもよい

(1) 区間 $[a,\ b]$ を n 等分する $(n$：大$)$

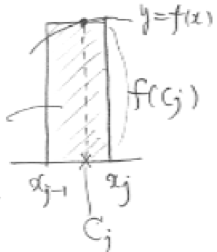
$$\begin{cases} \Delta x = \dfrac{b-a}{n} & \text{（分割幅）} \\ x_j = a + j\Delta x & (j=0,1,2,\cdots,n)\ \text{（分点）} \end{cases}$$



(2) 各小区間 $[x_{j-1},\ x_j]$ 内に点 $x=c_j$ をとり

そこでの f の値を高さとする　どこでもよい

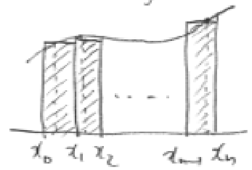
長方形で近似する：



$S_n = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} f(c_j)\Delta x = f(c_1)\Delta x + f(c_2)\Delta x + \cdots + f(c_n)\Delta x$

長方形の面積

$=[a,b]$ 上の面積の近似



(3) c_j のとり方によらず $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ が同じ

極限値を持つ場合，それを $\underline{\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \text{ とする}}$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n} f(c_j)\Delta x$$

$\boxed{S=\text{sum}\ (\text{和}) \to \int}$ → $\left(\displaystyle\int_a^b \quad f(x) \quad dx\right)$

◎ $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx =$ $f(x)dx$ を a から b まで加えたもの

（高さ）（幅）

$=\underline{\text{連続的に変化するものの総和}}$