平成 14 年 7 月 12 日
(最終更新日: 平成 18 年 3 月 5 日)

# $x^x$ の微分と極限について

新潟工科大学 情報電子工学科 竹野茂治

## 1 $x^x$ の微分

$x^x$ の微分は、底も指数も定数でないので、通常の $x^a$ や $a^x$ の微分の公式が使えずやや難しい。通常は

- $y=x^x$ とおいて両辺の対数をとり $\log y = x\log x$ として両辺を微分 (対数微分法)
- $x^x = e^{x\log x}$ と変形して微分

のいずれかを使うのではないかと思われる。

ここでは、例年基礎数理 III で紹介している 2 変数関数の合成関数の微分法:

$z=f(x,y)$ に $x=x(t)$, $y=y(t)$ を代入した $z=f(x(t),y(t))$ に対して、

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

を用いる方法を紹介する[1]。

$z=x^y$ とすると、

$$\frac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=x^y\log x$$

となるので、$z=t^t$ を $z=x^y$ に $x=t$, $y=t$ を代入したものと考えれば 2 変数関数の合成関数の微分法により

$$\begin{aligned}(t^t)' &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}\\ &= yx^{y-1}\cdot 1 + x^y\log x\cdot 1 = t\cdot t^{t-1}+t^t\log t\\ &= t^t + t^t\log t\end{aligned}$$

となり、よって $(x^x)'=x^x+x^x\log x$ が得られる。

この方法のいいところは、常微分の範疇ではこの関数には使えない通常の $x^a$ や $a^x$ の微分の公式が、偏微分では使える、という点にある。

ただし、もちろん偏微分をやった後でないと学生には紹介できない。

[1] この方法は、1999 年の卒業生に教わった。

# 2 $0^0$

ごくたまに、$0^0$ は 0 ですか、と聞かれることがある。実際には不定形なので、$0^0$ と書かれると何とも答えようがないが、

$$\lim_{x\to+0} x^x$$

ならば極限を持つ。これは次のようにして求めることができる。

$y = x^x$ の極限を考える代わりに $\log y = x\log x$ の極限を考える。するとロピタルの定理により

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+0}\log y &= \lim_{x\to+0} x\log x = \lim_{x\to+0}\frac{\log x}{\dfrac{1}{x}} = \lim_{x\to+0}\frac{(\log x)'}{\left(\dfrac{1}{x}\right)'}\\ &= \lim_{x\to+0}\frac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+0}(-x) = 0\end{aligned}$$

となるので、

$$\lim_{x\to+0} y = \lim_{x\to+0} x^x = 1$$

となる。

古い話になるが、私が大学 1 年のときの解析のテスト問題の一つに、この極限をロピタルの定理を「用いずに」求めよ、という問題が出たことがある。興味のある人は考えてみるといいだろう。

(追記)

上記をもって、$0^0 = 1$ と誤解してはいけない。最初にも述べたように、$0^0$ は不定形であって 1 ではない。すなわち、$x > 0$ で定義された関数 $f(x), g(x)$ が

$$f(x) > 0,\quad \lim_{x\to+0} f(x) = 0,\quad \lim_{x\to+0} g(x) = 0 \tag{1}$$

を満たす場合に、$\lim_{x\to+0} f(x)^{g(x)}$ の値は一定値には収束しない (上に紹介したのは、単に $f(x) = g(x) = x$ の場合の話)。例えば、$f(x) = x,\ g(x) = p/\log x$ ($p$ は 0 以外の定数) とすればこれは (1) を満たすが、

$$\log f(x)^{g(x)} = g(x)\log f(x) = \frac{p}{\log x}\log x = p$$

すなわち $f(x)^{g(x)} = e^p$ であるから、$p$ により 1 以外の任意の正の値を取りうる。

また、$f(x) = e^{-1/x},\ g(x) = -\sqrt{x}$ とすればこれも (1) を満たすが、

$$\lim_{x\to+0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to+0}\left(e^{-1/x}\right)^{-\sqrt{x}} = \lim_{x\to+0} e^{1/\sqrt{x}} = \infty$$

のように $\infty$ にもなりうる。よって $f(x)^{g(x)}$ の値は一つには決まらず、$0^0$ は不定形である。