基礎数理 III 基礎復習問題 第 14 回

正答例

- 行列式の性質 (A, B: n 次正方行列、c: スカラー):
  $|{}^tA| = |A|$,　$|cA| = c^n|A|$,　$|AB| = |A||B|$,　$|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$,　三角行列の行列式 = 対角成分の積
  (注意:　$|A+B| \neq |A|+|B|$,　$c|A| \neq |cA|$)
- 展開定理:　$|A| = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+j}a_{kj}\Delta_{kj}$ (j 列での展開)、　$|A| = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{i+k}a_{ik}\Delta_{ik}$ (i 行での展開)

[1]　次の問いに答えよ。

(1) 3 次の正方行列 A, B が、$|B| \neq 0$ で、$2AB = -{}^tB$ を満たすとき、$|A|$ の値を求めよ。

両辺の行列式を考えると

左辺 $= |2AB| \underset{3次}{=} 8|AB| = 8|A||B|$,　右辺 $= |-{}^tB| = (-1)^3|{}^tB| = -|B|$

より　$8|A||B| = -|B|$,　$|B| \neq 0$ より　$8|A| = -1$　∴ $|A| = -\frac{1}{8}$

(2) 4 次の正方行列 A が、${}^tAA^2 = 3E$ を満たすとき、$|A|$ の値を求めよ。

両辺の行列式を考えると

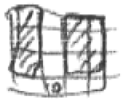
左辺 $= |{}^tAA^2| = |{}^tA||A^2| = |A||A||A| = |A|^3$,　右辺 $= |3E| \underset{4次}{=} 3^4 = 81$

よって　$|A|^3 = 81$ より　$|A| = \sqrt[3]{81}$　$(= 3\sqrt[3]{3})$

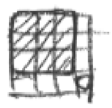
(3) 次の 4 次の行列式を、4 行目で展開して計算せよ。

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 5 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -0 + 4\begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} - 0 + 1\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

⊖から



3次はサラス



$$= 4\times(\underbrace{0+10+0-0-0-(-2)}_{12}) + (\underbrace{6+(-6)+0-(-2)-0-2}_{0})$$

$$= 48$$

正答数 ☐　時間 ☐ : ☐