基礎数理 III 基礎復習問題 第 10 回

正答例

- A の逆行列 A^{-1}: $XA = AX = E$ となる X
- 2 次の正方行列 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ が逆行列 A^{-1} を持つ (正則) $\iff$ $ad - bc \neq 0$

  このとき $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

[1] 次の行列 A の逆行列 A^{-1} があるかどうか確認し、ある場合は A^{-1} を求めよ。

(1) $A = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$

$ad-bc = 18-16 = 2 \neq 0$

よって A^{-1} はある

$A^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 6 & -8 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$

(Aとかければ確認できる)

(2) $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

$ad-bc = 12-0 \neq 0$. A^{-1}はある

$A^{-1} = \dfrac{1}{12}\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

$\left(\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{bmatrix} \right)$ ← 成分の逆数

(3) $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$

$ad-bc = 0-12 \neq 0$, A^{-1}はある

$A^{-1} = \dfrac{1}{-12}\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$

(単純に成分の逆数ではない)

(4) $A = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

$ad-bc = 0-16 \neq 0$, A^{-1}はある

$A^{-1} = \dfrac{1}{-16}\begin{bmatrix} 2 & -8 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{8} & 0 \end{bmatrix}$

$\left(\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}^{-1}}_{(1)} - \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}^{-1}}_{(2)} \right.$ ではない$\left.\right)$

(5) $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 5a & 5b \end{bmatrix}$

$(ad-bc=)\ a\cdot 5b - b\cdot 5a = 0$

$\therefore$ A^{-1}はない。

(1行目)×5＝2行目

(6) $A = 3\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}$

$ad-bc = 27-(-18) = 45 \neq 0$, A^{-1}はある

$A^{-1} = \dfrac{1}{45}\begin{bmatrix} 9 & -6 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{2}{15} \\ \frac{1}{15} & \frac{1}{15} \end{bmatrix}$

(実は $A^{-1} = \underbrace{\dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}^{-1}} = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{3+2}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \dfrac{1}{15}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$)

一般に $(cA)^{-1} = \dfrac{1}{c}A^{-1}$

正答数		時間		:	