

# 正答例

## 基礎数理 III 基礎復習問題 第 9 回

- 行列の積の性質:  $(AB)C = A(BC)$ ,  $(A+B)C = AC + BC$ ,  $A(B+C) = AB + AC$
- 転置行列 ( ${}^tA$ ):
  - ${}^tA = A$  の  $(j, i)$  成分を  $(i, j)$  成分とする行列
  - ${}^t({}^tA) = A$ ,  ${}^t(A \pm B) = {}^tA \pm {}^tB$ ,  ${}^t(cA) = c({}^tA)$  ( $c$ : 定数),  ${}^t(AB) = ({}^tB){}^tA$
  - 対称行列  $A$ :  ${}^tA = A$  となる行列, 交交代行列  $A$ :  ${}^tA = -A$  となる行列

[1]  $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$  に対し、次の計算をせよ。

(1)  $A^2$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 4+4 & 8-12 \\ 2-3 & 4+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ -1 & 13 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

(2)  $A^3 = A^2A$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ -1 & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 16-4 & 32+12 \\ -2+13 & -4-39 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 12 & 44 \\ 11 & -43 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$AA^2$  ともよい

$$\begin{aligned}
 &\downarrow \\
 &= \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ -1 & 13 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 16-4 & -8+52 \\ 8+3 & -4-39 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 12 & 44 \\ 11 & -43 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

(3)  $A^tA$

(対称行列)

$$\begin{aligned}
 &= \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 4+16 & 2-12 \\ 2-12 & 1+9 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 20 & -10 \\ -10 & 10 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

(対称行列)

(4)  ${}^tAA$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 4+1 & 8-3 \\ 8-3 & 16+9 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 25 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

[2]  $n$  次の正方行列  $A$  と  $n$  次の単位行列  $E$  に対し、次の式を展開せよ。

$$\begin{aligned}
 (5) (A+3E)(2A-E) &= A(2A) - AE + 3E(2A) - 3EE \\
 &= 2A^2 - A + 6A - 3E \\
 &= 2A^2 + 5A - 3E
 \end{aligned}$$

◦  $AE = A$   
 ◦  $3E(2A) = 6EA = 6A$   
 ◦  $3EE = 3E$

$A$  と  $E$  は可換なので  
 普通に展開しても同じだよ

(6)  $(3A-5E)^2 = (3A-5E)(3A-5E)$

$$\begin{aligned}
 &= 9AA - 15AE - 15EA + 25EE \\
 &= 9A^2 - 30A + 25E
 \end{aligned}$$

$(E^2 = EE = E)$

正答数  時間  :