

正答例

- 外積の図形的性質 (定義):
 - $|a \times b| = a, b$ が作る平行四辺形の面積 $= |a||b|\sin\theta$
 - $a \times b \perp a, a \times b \perp b$ で、 a と b と $a \times b$ はこの順に右手系
- 成分計算: $a \times b = \begin{bmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{bmatrix}$
- 基本性質: $\begin{cases} a \times a = 0, & b \times a = -a \times b, & (ka) \times b = a \times (kb) = k(a \times b) \\ (a+b) \times c = a \times c + b \times c, & a \times (b+c) = a \times b + a \times c \end{cases}$
- $a \neq 0, b \neq 0$ のとき、 $a \times b = 0 \iff a \parallel b$
- $\begin{cases} e_1 \times e_2 = e_3, & e_2 \times e_3 = e_1, & e_3 \times e_1 = e_2 \\ e_2 \times e_1 = -e_3, & e_3 \times e_2 = -e_1, & e_1 \times e_3 = -e_2 \end{cases}$

[1] $a \times b = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$ のとき、次のものを求めよ。

(1) a と b が作る平行四辺形の面積 S

$$S = |a \times b| = \sqrt{1+16+4} = \sqrt{21}$$

(3) $(-3b) \times (2a) = -6b \times a$

$$= 6a \times b = \begin{bmatrix} 6 \\ 24 \\ -12 \end{bmatrix}$$

(2) a と b に垂直な単位ベクトル c

$a \times b$ が a, b に垂直なベクトル

$$\therefore c = \pm \frac{1}{|a \times b|} a \times b = \pm \frac{1}{\sqrt{21}} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \pm \frac{1}{\sqrt{21}} \\ \pm \frac{4}{\sqrt{21}} \\ \mp \frac{2}{\sqrt{21}} \end{bmatrix}$$

a と同じ向き
単位ベクトルは $\frac{1}{|a|} a$

[2] たすきがけの公式を用いて、次の 2 つのベクトルの外積 $c = a \times b$ を計算せよ。

(4) $a = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix}$

(5) $a = \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ -4 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$

- ① 2 段書き
- ② 両立端を消し
- ③ たすきがけ

$$\begin{array}{r} \begin{array}{r} 3 \quad 2 \\ 2 \times -4 \rightarrow -8 - (-4) \\ 1 \times -3 \rightarrow 2 - (-9) \\ 3 \times 2 \rightarrow -12 - 4 \\ 2 \times -4 \rightarrow -12 - 4 \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{r} \begin{array}{r} 0 \quad 3 \\ 7 \times 0 \rightarrow -14 - 0 \\ -4 \times -2 \rightarrow -12 - 0 \\ 0 \times 3 \rightarrow -12 - 0 \\ 7 \times 0 \rightarrow 0 - 21 \\ \hline \end{array} \end{array}$$

$$c = \begin{bmatrix} -2 \\ 11 \\ -16 \end{bmatrix}$$

$$c = \begin{bmatrix} -14 \\ -12 \\ -21 \end{bmatrix}$$

[3] 次の計算をせよ。

(6) (4) の a, b, c に対する $(c, a), (c, b)$

$$(c, a) = -6 + 22 - 16 = 0$$

$$(c, b) = -4 - 44 + 48 = 0$$

(7) (5) の a, b, c に対する $(c, a), (c, b)$

$$(c, a) = 0 - 84 + 84 = 0$$

$$(c, b) = -42 + 0 + 42 = 0$$

$c = a \times b$ は a, b に垂直なので 0 になるはず

正答数

時間

 :