(正答例)

基礎数理 III 基礎復習問題 第 4 回

- 内積の図形的性質 (定義): $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$
- 成分計算: $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \begin{cases} a_1b_1 + a_2b_2 & \text{(平面ベクトル)} \\ a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 & \text{(空間ベクトル)} \end{cases}$
- 基本性質:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = |\boldsymbol{a}|^2, \quad (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}), \quad (k\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}, k\boldsymbol{b}) = k(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$$
$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}), \quad (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})$$

- $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ のとき、$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0 \iff \boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$

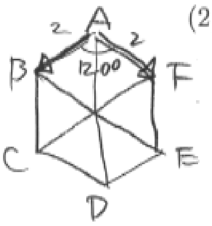
[1] 中心 O の正六角形 ABCDEF (AB=2) に対して、次の内積の値を求めよ。

(1) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AF})$

$= |\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AF}|\cos 120^\circ$

$= 2 \times 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)$

$= \underline{-2}$

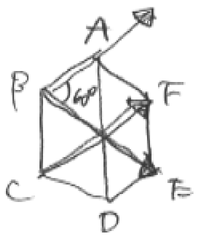


(2) $(\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{CF})$

$= |\overrightarrow{BE}||\overrightarrow{CF}|\cos 60^\circ$

$= 4 \times 4 \times \frac{1}{2}$

$= \underline{8}$

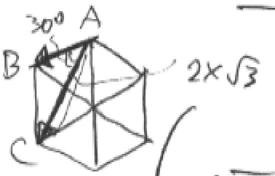


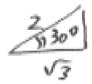
(3) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

$= |\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos 30^\circ$

$= 2 \times 2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

$= \underline{6}$





(又は $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB} + \underset{\overrightarrow{AO}}{\overrightarrow{BC}})$

$= (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO})$

$= 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 4 + 2 = 6$)

[2] $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$ に対して次の値を求めよ (θ は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角)

(4) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$

$= -6 + 8 + 0 = \underline{2}$

(5) $|\boldsymbol{a}|$ $= \sqrt{4+4+9} = \underline{\sqrt{17}}$

(6) $|\boldsymbol{b}|$ $= \sqrt{9+16+0}$

$= \underline{5}$

(7) $\cos\theta$

$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$ より

$\cos\theta = \frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|} = \frac{2}{\sqrt{17} \cdot 5} = \underline{\frac{2}{5\sqrt{17}}}$

$\left(= \frac{2\sqrt{17}}{85}\right)$

(8) $(3\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b})$

$3\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -6 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ -2 \\ 9 \end{bmatrix}$ より

$(3\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) = -36 - 8 + 0 = \underline{-44}$

(又は $(3\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) = (3\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) - (2\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) = 3(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) - 2|\boldsymbol{b}|^2$ $((\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{b}|^2)$

$= 6 - 50 = -44$)

正答数		時間		:	