

[6-4] 外積の応用例

- (1) 空間内の平行四辺形や三角形の面積, 四面体の体積
- (2) 2つの方向に垂直な方向を求めよ
- (3) 物理学

例4 (1), (2)

$A(2, 1, -1), B(3, 1, -4), C(0, 2, -1), D(1, -1, 3)$



- ① $S = \Delta ABC$ の面積?
- ② ΔABC に垂直な単位ベクトル n は?
- ③ 四面体 ABCD の体積 V は?

① $S = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$

$\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}, \overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 6e_2 + e_3 - (-3e_1) = 3e_1 + 6e_2 + e_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\therefore S = \frac{1}{2} \left| \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix} \right| = \frac{1}{2} \sqrt{9 + 36 + 1} = \frac{1}{2} \sqrt{46}$

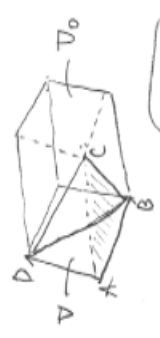
② $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ が ΔABC に垂直.

$\therefore n = \pm \frac{1}{\sqrt{46}} (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) = \pm \frac{1}{\sqrt{46}} \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} \pm 3/\sqrt{46} \\ \pm 6/\sqrt{46} \\ \pm 1/\sqrt{46} \end{bmatrix}$

② 平行六面体の体積 = V_0 とおす

V は 底面積が半分と高さは同じ



$\therefore V = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} V_0 = \frac{1}{6} V_0$

底面積が半分 $= \frac{1}{6} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}|$

$\overrightarrow{AD} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix} = -3 - 12 + 4 = -11$

$\therefore V = \frac{1}{6} |-11| = \frac{11}{6}$

例2 (3)

。7Lミンクンの法則



$F = L(I \times B)$

(ビオ・サバールの法則 等)

。回転モーメント



平で固定した軸 PQ に
Q での力 F をかけると

$M = \overrightarrow{PQ} \times F = \text{回転モーメント}$

{ 大きさ = 距離と力の大きさと力の大きさ (距離 × 力)
方向 = 力の回転に垂直に右ねじの進む向き