◎ 固有値，固有ベクトル ＝ 正方行列のある特徴を示すもの

A：n次正方行列（通常は成分は実数）に対し

$\boxed{A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}}$ —① となるスカラー λ と列ベクトル $\boldsymbol{x}\,(\neq \boldsymbol{0})$ が存在するとき

行列倍　　スカラー倍

λ＝Aの固有値，$\boldsymbol{x}$＝(λに対する) Aの固有ベクトル

最大 n 個まで

例　$A = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$

同じ　　Aの固有値はこの2つ

$A\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda = -1$ は固有値，$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ は固有ベクトル (λ＝−1の)

$A\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 \\ 6 \end{bmatrix} = -6\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda = -6$　〃　$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ は　〃 (λ＝−6の)

同じ

・意味（1次変換）

$\begin{cases} u = -5x + 2y \\ v = 2x - 2y \end{cases}$ という1次変換を $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

とみると，固有ベクトル $\overset{①}{\Longleftrightarrow}$ この変換で方向が変わらないベクトル

これ以外の方向は A倍で方向が変わる

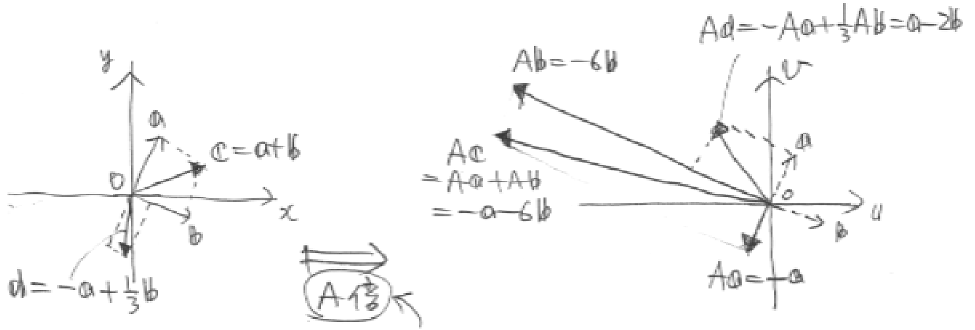
例

$A\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{a}$，$A\boldsymbol{b} = -6\boldsymbol{b}$

$A(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = A\boldsymbol{a} + A\boldsymbol{b} = -\boldsymbol{a} - 6\boldsymbol{b}$

$A(-\boldsymbol{a} + \frac{1}{3}\boldsymbol{b}) = -A\boldsymbol{a} + \frac{1}{3}A\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b}$

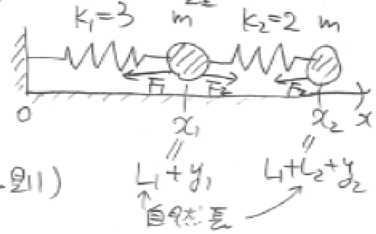
$\left(\begin{aligned} &A(s\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}) \\ &= sA\boldsymbol{a} + tA\boldsymbol{b} \\ &= -s\boldsymbol{a} - 6t\boldsymbol{b} \end{aligned}\right)$



（すべてのベクトルを a方向に(−1)倍，b方向に(−6)倍している）

・応用例 (1) 連成振動　　系が持つゆれやすさ

固有値 ＝ 複数の固有振動数を表現



{ おもりの位置 $x_1(t)$，$x_2(t)$　(t：時刻)
{ 自然長からのずれ $y_1 = x_1 - L_1$，$y_2 = x_2 - L_1 - L_2$

$ma = mx'' = my''$，$F = -kx$（フックの法則）

y_1の加速度　F_1　F_2

⇒ ② $\begin{cases} my_1'' = -3y_1 + 2(y_2 - y_1) = -5y_1 + 2y_2 \\ my_2'' = -2(y_2 - y_1) \qquad = 2y_1 - 2y_2 \end{cases}$　(連立微分方程式)

F_2

⇓ 行列化

③ $m\begin{bmatrix} y_1'' \\ y_2'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \overset{転置}{\Longrightarrow}$ ④ $m\begin{bmatrix} y_1'' & y_2'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix}\overset{A}{\overset{\|}{\begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}}}$

④の両辺に Aの固有ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ をかける（右から）

$m\begin{bmatrix} y_1'' & y_2'' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix}A\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix}\left(-\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right)$　振動数 $\frac{1}{2\pi\sqrt{m}}$

$m(y_1'' + 2y_2'') = -(y_1 + 2y_2)$　∴ $\underline{m(y_1 + 2y_2)'' = -(y_1 + 2y_2)}$ —⑤

同様に④に右から $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ 倍 ⇒ $\underline{m(2y_1 - y_2)'' = -6(2y_1 - y_2)}$ —⑥

$mz'' = -kz \Rightarrow$ 振動数 $\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$ の単振動　　振動数 $\frac{\sqrt{6}}{2\pi\sqrt{m}}$

⇒ y_1，y_2 は 振動数$\left(= \frac{1}{周期}\right)$ $\frac{1}{2\pi\sqrt{m}}$，$\frac{\sqrt{6}}{2\pi\sqrt{m}}$ の振動の和となる。

そのような振動に共振しやすい

(2) 多変量解析（因子分析，主成分分析）

多くの要因に基づくデータの分析

⇒ 各要素間の関係を行列化（共分散行列，相関行列）

それらの行列の固有値，固有ベクトルにより 主たる因子，主たる方向を知ることができる。