2023 年 11 月 27 日

# ケイリー・ハミルトンの公式と行列の累乗

新潟工科大学 基礎教育・教養系 竹野茂治

## 1 はじめに

この講義で使用している線形代数の教科書 [1] には書かれていないが、$N$ 次正方行列 $A$ の $N$ 乗 $A^N$ は、$E, A, A^2, \ldots, A^{N-1}$ の定数倍の和で表すことができる「ケイリー・ハミルトンの公式」と呼ばれるものが知られている。

本稿ではその公式の紹介と、その応用として行列の累乗の計算の簡略化について紹介する。行列の累乗の計算は、行列の応用としてはそれなりに意味があるので、その簡略化は有益である。

## 2 ケイリー・ハミルトンの公式

まず、ケイリー・ハミルトンの公式を紹介する。2 次の正方行列に対しては、次のようになる。

**定理 1**

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ に対し、

$$A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E = O \tag{1}$$

が成り立つ ($E$ は単位行列、$O$ はゼロ行列)。

証明

$$\begin{aligned}
A^2 - (a+d)A &= A(A-(a+d)E) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -d & b \\ c & -a \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -ad+bc & ab-ba \\ -cd+dc & cb-da \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -ad+bc & 0 \\ 0 & -ad+bc \end{bmatrix} \\
&= -(ad-bc)E
\end{aligned}$$

■

3 次以上の行列にも同様のことが成り立つことが知られているが、それを説明するには行列式 (教科書 [1] 第 3 章) が必要となる。$N$ 次正方行列 $A$ に対して、行列式

$$f_A(x) = |xE - A| \tag{2}$$

で定まる $N$ 次多項式を $A$ の固有多項式と呼ぶ。一般のケイリー・ハミルトンの公式は以下のようになる。

**定理 2**

$N$ 次正方行列 $A$ に対し、$f_A(A) = O$ が成り立つ。

定理 2 の証明は易しくはない。なお、多項式

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + a_1 x + a_0$$

に対し、正方行列 $A$ を代入した式、すなわち行列の多項式は、

$$f(A) = \sum_{k=0}^{m} a_k A^k = a_m A^m + a_{m-1} A^{m-1} + a_1 A + a_0 E$$

と定める。$A^j$ と $A^k$ は可換なので、多項式に対して $p(x)q(x) = r(x)$ が成り立てば、行列に対しても $p(A)q(A) = q(A)p(A) = r(A)$ が成り立つ。

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ に対しては、

$$\begin{aligned} f_A(x) &= |xE - A| = \begin{vmatrix} x-a & -b \\ -c & x-d \end{vmatrix} = (x-a)(x-d) - bc \\ &= x^2 - (a+d)x + (ad - bc) \end{aligned}$$

なので、定理 2 の $N = 2$ の場合が定理 1 になる。

## 3　2 次の正方行列の累乗の逐次計算

ケイリー・ハミルトンの公式 (1) を用いると、2 次の正方行列の累乗 $A^n$ を、行列の積を用いずに行列のスカラー倍と和だけで計算することができる。

例えば、

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} \tag{3}$$

に対しては、(1) より $A^2 - (2-5)A + (-10+12)E = O$、すなわち

$$A^2 = -3A - 2E \tag{4}$$

が成り立つので、

$$A^2 = \begin{bmatrix} -6 & 12 \\ -9 & 15 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 12 \\ -9 & 13 \end{bmatrix}$$

と、行列の積を用いずにスカラー倍と和のみで $A^2$ が求まる。$A^3$ は、(4) の両辺を $A$ 倍して、

$$A^3 = A(-3A-2E) = -3A^2 - 2A$$

となるが、これに再び (4) を代入すれば、

$$A^3 = -3(-3A-2E) - 2A = 7A + 6E$$

となり、よって

$$A^3 = \begin{bmatrix} 14 & -28 \\ 21 & -35 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & -28 \\ 21 & -29 \end{bmatrix}$$

と求まる。$A^4$ も同様に

$$A^4 = A(7A+6E) = 7A^2 + 6A = 7(-3A-2E) + 6A = -15A - 14E$$

となるので、積を計算せずにスカラー倍と和のみで $A^4$ が計算できる。以下同様にして、$A^n$ はすべて

$$A^n = p_nA + q_nE \tag{5}$$

の形に表せることになる。なお、この $p_n$, $q_n$ は、

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= p_{n+1}A + q_{n+1}E \\ &= A(A^n) = A(p_nA + q_nE) = p_nA^2 + q_nA = p_n(-3A - 2E) + q_nA \\ &= (-3p_n + q_n)A - 2p_nE \end{aligned}$$

より、漸化式

$$p_{n+1} = -3p_n + q_n, \quad q_{n+1} = -2p_n, \quad (p_1, q_1) = (1, 0) \tag{6}$$

を満たし、これを用いて計算することもできる。例えば、$(p_2, q_2)$=$(-3, -2)$, $(p_3, q_3)$=$(7, 6)$, $(p_4, q_4)$=$(-15, -14)$ といった具合で、これを利用する方が、前の計算よりはさらに少し楽になる。

## 4 3 次の正方行列の場合

3 次の正方行列 $A$ の場合は、固有多項式 $f_A(x)$ を

$$f_A(x) = x^3 - ax^2 - bx - c$$

とすれば、ケイリー・ハミルトンの公式は

$$A^3 = aA^2 + bA + cE \tag{7}$$

となるので、$A^2$ の積の計算は必要だが、$A^n$ は

$$A^n = a_nA^2 + b_nA + c_nE \tag{8}$$

の形で表すことができる。やり方は 2 次の場合と同様である。この係数の漸化式を求めると、

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= a_{n+1}A^2 + b_{n+1}A + c_{n+1}E \\ &= A(a_nA^2 + b_nA + c_nE) = a_nA^3 + b_nA^2 + c_nA \\ &= a_n(aA^2 + bA + cE) + b_nA^2 + c_nA \\ &= (aa_n + b_n)A^2 + (ba_n + c_n)A + ca_nE \end{aligned}$$

となるので、漸化式は、

$$a_{n+1} = aa_n + b_n, \quad b_{n+1} = ba_n + c_n, \quad c_{n+1} = ca_n, \quad (a_1, b_1, c_1) = (0, 1, 0) \tag{9}$$

となって、これを使えば順次係数が決定できる。例えば、

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

の場合、固有多項式は、

$$\begin{aligned} f_A(x) &= |xE - A| = \begin{vmatrix} x-1 & -2 & -3 \\ -3 & x & 2 \\ 0 & 1 & x-4 \end{vmatrix} \\ &= (x-1)x(x-4) + 9 + 0 - 0 - 2(x-1) - 6(x-4) \\ &= x^3 - 5x^2 + 4x + 9 - 2x + 2 - 6x + 24 \\ &= x^3 - 5x^2 - 4x + 35 \end{aligned}$$

となるので、$A^3 - 5A^2 - 4A + 35E = O$, すなわち、

$$A^3 = 5A^2 + 4A - 35E$$

となるから、(8) の係数は、漸化式

$$a_{n+1} = 5a_n + b_n, \quad b_{n+1} = 4a_n + c_n, \quad c_{n+1} = -35a_n, \quad (a_1, b_1, c_1) = (0, 1, 0)$$

によって求められることになる。

# 5 一般項の決定

ここまで、ケイリー・ハミルトンの公式を利用して、$A^n$ の次数を下げて計算する逐次計算を見てきたが、2 次の正方行列の場合には、その係数 $p_n$, $q_n$ の一般項を初等的に求めることもできる。

それは、$p_n$, $q_n$ に関する漸化式を解く方法でも求めることはできるが、ここではケイリー・ハミルトンの公式から考えてみることにする。

固有多項式のゼロ点を求める方程式

$$f_A(x) = x^2 - (a+d)x + (ad-bc) = 0 \tag{10}$$

を固有方程式と呼ぶ。この固有方程式の解によって場合分けして考える。

まず、(10) が 2 つの実数解 $\alpha, \beta$ $(\alpha \neq \beta)$ を持つときを考える。この場合、$f_A(x) = (x-\alpha)(x-\beta)$ と因数分解され、$f_A(A) = 0$ であるから、

$$(A-\alpha E)(A-\beta E) = O \tag{11}$$

が成り立つことになる。ただし、行列の場合には、ここから $A = \alpha E, \beta E$ が言えるわけではない。(11) を半分展開すると、

$$A(A-\beta E) - \alpha E(A-\beta E) = O$$

となるから

$$A(A-\beta E) = \alpha(A-\beta E) \tag{12}$$

が得られる。同様に $A-\beta E$ の方を半分展開すると、

$$A(A-\alpha E) = \beta(A-\alpha E) \tag{13}$$

となる。(12) の左から $A$ 倍すると、

$$A^2(A-\beta E) = \alpha A(A-\beta E)$$

となるので、再び (12) を用いれば、

$$A^2(A-\beta E) = \alpha^2(A-\beta E)$$

となる。これを繰り返すと、すべての $n \geq 1$ に対して

$$A^{n-1}(A-\beta E) = \alpha^{n-1}(A-\beta E) \tag{14}$$

となることがわかる。同様に、(13) を用いれば、

$$A^{n-1}(A-\alpha E)=\beta^{n-1}(A-\alpha E) \tag{15}$$

が得られる。(14) の $\alpha$ 倍から (15) の $\beta$ 倍を引けば、

$$(\alpha-\beta)A^n=(\alpha^n-\beta^n)A-(\alpha^n\beta-\alpha\beta^n)E$$

となるので、$\alpha\neq\beta$ より、

$$A^n=\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}A-\frac{\alpha^n\beta-\alpha\beta^n}{\alpha-\beta}E=\alpha^n\frac{A-\beta E}{\alpha-\beta}+\beta^n\frac{A-\alpha E}{\beta-\alpha} \tag{16}$$

のように書け、$p_n$, $q_n$ の一般項が得られることになる。

例えば、3 節の (3) の $A$ の場合、

$$f_A(x)=x^2-(a+d)x+(ad-bc)=x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$$

なので、$\alpha=-1$, $\beta=-2$ で、よって (16) より

$$\begin{aligned} A^n &= \{(-1)^n-(-2)^n\}A-\{-2(-1)^n+(-2)^n\}E \\ &= (-1)^{n+1}\{(2^n-1)A+(2^n-2)E\} \end{aligned}$$

となり、3 節の計算結果にも一致する。

(10) が 2 つの虚数解を持つ場合も、$\alpha\neq\beta$ であれば上と同じ議論が行えるので、(16) が成立する。

最後に、(10) が重解 $\alpha$ を持つ場合を考える。もし、$\alpha=0$ ならば、(11) より $A^2=O$ なので、この場合は $n\geq 2$ に対して $A^n=O$ となる。よってあとは $\alpha$ が重解で $\alpha\neq 0$ の場合を考えればよい。

この場合は、(14) と同様にして、

$$A^{n-1}(A-\alpha E)=\alpha^{n-1}(A-\alpha E)$$

が成立することはわかるので、これを展開して $\alpha^n$ で割ると

$$\frac{A^n}{\alpha^n}-\frac{A^{n-1}}{\alpha^{n-1}}=\frac{A}{\alpha}-E \tag{17}$$

となる。これは、行列の「数列」として、$\{A^n/\alpha^n\}$ がこの右辺を公差とする等差数列であることを意味するので、その一般項は

$$\frac{A^n}{\alpha^n}=\frac{A}{\alpha}+(n-1)\left(\frac{A}{\alpha}-E\right)=\frac{n}{\alpha}A-(n-1)E$$

となり、よって、

$$A^n=n\alpha^{n-1}A-(n-1)\alpha^nE \tag{18}$$

が得られることになる。例えば、

$$A=\begin{bmatrix}2&5\\-5&-8\end{bmatrix}$$

の場合、(10) は

$$f_A(x)=x^2-(-6)x+(-16+25)=x^2+6x+9=(x+3)^2=0$$

なので重解 $-3$ を持ち、よって (18) より

$$A^n=n(-3)^{n-1}A-(n-1)(-3)^nE=(-3)^{n-1}\{nA+3(n-1)E\}$$

となる。実際、$A^2=-6A-9E$ より、

$$A^3=-6A^2-9A=-6(-6A-9E)-9A=27A+54E=(-3)^2(3A+3\cdot 2E)$$

となる。

# 6 $N$ 次の場合

5 節の方法は、$N$ 次の正方行列にも拡張できるが、固有方程式に重解があるとかなり煩雑になる。本節では、まず固有方程式に重解がない場合の一般的な結果を紹介し、重解がある場合も簡単な場合に限って説明をする。

まず、固有方程式の解を $\alpha_j$ $(j=1,2,\ldots,N)$ とし、これらはすべて互いに異なるとする。このとき、固有多項式 $f_A(x)$ は

$$f_A(x)=\prod_{j=1}^{N}(x-\alpha_j)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_N)$$

と因数分解されることになるが、そこから $x-\alpha_j$ を抜いた $(N-1)$ 次式を $p_j(x)$ と書くことにする。

$$p_j(x)=\frac{f_A(x)}{x-\alpha_j}\quad (j=1,2,\ldots,N) \tag{19}$$

これに対し、次の恒等式が成り立つことに注意する。

$$x^{N-1}=\sum_{j=1}^{N}\frac{p_j(x)}{p_j(\alpha_j)}\alpha_j^{N-1} \tag{20}$$

これは、形式的には、

$$x^{N-1}=\sum_{j=1}^{N}\beta_j p_j(x)$$

と置いて、$x=\alpha_j$ とすると、$p_j(\alpha_j)$ 以外の右辺の項は 0 になるので、

$$\alpha_j^{N-1}=\beta_j p_j(\alpha_j)$$

となり、そこから (20) が得られる。一方、(20) の両辺はいずれも $(N-1)$ 次式で、$N$ 個の異なる値 $x=\alpha_j$ $(1\le j\le N)$ で両辺の値は一致するので、等号が恒等的に成り立つことが保証される。

さて、$f_A(x)$ は、$f_A(x)=(x-\alpha_j)p_j(x)$ と書けるので、ケイリー・ハミルトンの公式より、

$$f_A(A)=(A-\alpha_j E)p_j(A)=O$$

となるから、

$$Ap_j(A)=\alpha_j p_j(A) \tag{21}$$

が成り立つ。これが前節の (12), (13) に対応する。よってここから、$m \geq 1$ に対して

$$A^m p_j(A) = \alpha_j^m p_j(A) \tag{22}$$

が得られ、これがすべての $j$ に対して成立する。

(20) は恒等式なので、当然 $x$ を $A$ にした式も成立し、よって、

$$A^{N-1} = \sum_{j=1}^{N} \frac{\alpha_j^{N-1}}{p_j(\alpha_j)} p_j(A) \tag{23}$$

となるが、両辺に $A^m$ をかけると (22) により、

$$A^{m+N-1} = \sum_{j=1}^{N} \frac{\alpha_j^{N-1}}{p_j(\alpha_j)} A^m p_j(A) = \sum_{j=1}^{N} \frac{\alpha_j^{m+N-1}}{p_j(\alpha_j)} p_j(A)$$

となり、よって任意の $m \geq N$ に対して、

$$A^m = \sum_{j=1}^{N} \frac{\alpha_j^m}{p_j(\alpha_j)} p_j(A) \tag{24}$$

が成立することになる。右辺の $p_j(A)$ は $A$ の $(N-1)$ 次式なので、これで $A^m$ が $A$ の $(N-1)$ 次式として表されたことになる。なお、これは $N=2$ では (16) の最後の式に対応している。

次は、$N=3$ の場合で、固有方程式に重解が含まれる場合を考える。その場合の考察には、

- 上と同様の方法
- 重解が含まれない場合の、解が $\alpha, \beta, \gamma$ の場合の $A^n$ を表す式

  $$A^n = \frac{\alpha^n}{p_\alpha(\alpha)} p_\alpha(A) + \frac{\beta^n}{p_\beta(\beta)} p_\beta(A) + \frac{\gamma^n}{p_\gamma(\gamma)} p_\gamma(A)$$

  で、$\gamma \to \alpha$ の極限を取る方法
- 割り算による方法

などがあるが、ここでは、少し面倒だが上と同様の手法で考えてみる。

まずは、固有方程式の解が $x = \alpha, \alpha, \beta$ $(\alpha \neq \beta)$ の場合を考える。

この場合、$(A-\alpha E)^2(A-\beta E) = O$ となるので、(22) と同様にして、

$$\begin{aligned}&A(A-\alpha E)(A-\beta E) = \alpha(A-\alpha E)(A-\beta E)\\&A(A-\alpha E)^2 = \beta(A-\alpha E)^2\end{aligned}$$

から、$m \geq 0$ に対して

$$\begin{aligned}&A^{m-1}(A-\alpha E)(A-\beta E) = \alpha^{m-1}(A-\alpha E)(A-\beta E)\\&A^{m-1}(A-\alpha E)^2 = \beta^{m-1}(A-\alpha E)^2\end{aligned} \tag{25}$$

が得られる。1 本目の $\alpha$ 倍から 2 本目の $\beta$ 倍を引くと、

$$A^{m-1}(A-\alpha E)(\alpha-\beta)A = \{\alpha^m(A-\beta E) - \beta^m(A-\alpha E)\}(A-\alpha E)$$

より、

$$A^m(A-\alpha E) = \frac{(A-\alpha E)}{\alpha-\beta}\{\alpha^m(A-\beta E) - \beta^m(A-\alpha E)\} \tag{26}$$

が $m \geq 1$ に対し得られるが、これは $m = 0$ でも成立する。

ここで、もし $\alpha = 0$ ならば、少し戻って (25) の 2 本目の式から、$A^{m+1} = \beta^{m-1}A^2$ となり、よって $A^n = \beta^{n-2}A^2$ $(n \geq 2)$ となることがわかる。

$\alpha \neq 0$ の場合は、(26) の左辺を展開して $\alpha^{m+1}$ で両辺割ると、

$$\frac{A^{m+1}}{\alpha^{m+1}} - \frac{A^m}{\alpha^m} = \frac{(A-\alpha E)}{\alpha(\alpha-\beta)}\left\{(A-\beta E) - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^m(A-\alpha E)\right\}$$

となり、これを $m = 0$ から $m = n-1$ まで加えると、

$$\frac{A^n}{\alpha^n} - E = \frac{(A-\alpha E)}{\alpha(\alpha-\beta)}\left\{n(A-\beta E) - \frac{(\beta/\alpha)^n - 1}{\beta/\alpha - 1}(A-\alpha E)\right\}$$

となり、よって

$$\begin{aligned}A^n &= \alpha^n E + \frac{(A-\alpha E)}{\alpha-\beta}\left\{n\alpha^{n-1}(A-\beta E) - \frac{\beta^n-\alpha^n}{\beta-\alpha}(A-\alpha E)\right\}\\&= \alpha^n E + \frac{n\alpha^{n-1}}{\alpha-\beta}(A-\alpha E)(A-\beta E) - \frac{\alpha^n-\beta^n}{(\alpha-\beta)^2}(A-\alpha E)^2\end{aligned} \tag{27}$$

となる。これが、$\alpha$ が重解の場合の式となる。

さらに、$\alpha$ が $f_A(x)=0$ の三重解、すなわち $f_A(x)=(x-\alpha)^3$ の場合は、

$$A(A-\alpha E)^2=\alpha(A-\alpha E)^2$$

より、

$$A^m(A-\alpha E)^2=\alpha^m(A-\alpha E)^2$$

しか得られないが、左辺を一つ展開して $\alpha^{m+1}$ で割ると、

$$\left(\frac{A^{m+1}}{\alpha^{m+1}}-\frac{A^m}{\alpha^m}\right)(A-\alpha E)=\frac{1}{\alpha}(A-\alpha E)^2$$

となるので、これを $m=0$ から $m=n-1$ まで加えると、

$$\left(\frac{A^n}{\alpha^n}-E\right)(A-\alpha E)=\frac{n}{\alpha}(A-\alpha E)^2$$

が得られる。さらにこの $n$ を $m$ として、両辺を $\alpha$ で割って左辺を展開すると、

$$\frac{A^{m+1}}{\alpha^{m+1}}-\frac{A^m}{\alpha^m}-\frac{A}{\alpha}+E=\frac{m}{\alpha^2}(A-\alpha E)^2$$

となるので、再び $m=0$ から $m=n-1$ まで加えると、

$$\frac{A^n}{\alpha^n}-E-n\left(\frac{A}{\alpha}-E\right)=\frac{n(n-1)}{2\alpha^2}(A-\alpha E)^2$$

となり、結局

$$A^n=\alpha^nE+n\alpha^{n-1}(A-\alpha E)+\frac{n(n-1)}{2}\alpha^{n-2}(A-\alpha E)^2 \tag{28}$$

が成り立つ。なお、これは $n\geq 3$ で成り立つが、$n=0,1,2$ でも成立する。

# 7 割り算による方法

本節では、前節よりシンプルな割り算による方法で、$A^n$ の計算を考えてみる。

前節と同じ、$N=3$ の場合で考える。まず、$f_A(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ の、重解がない場合を考える。

$n\geq 3$ に対して $x^n$ を $f_A(x)$ で割れば、余りは 2 次式になり、よってその商を $Q_n(x)$, 余りを $R_n(x)$ とすれば

$$x^n = Q_n(x)f_A(x)+R_n(x)=Q_n(x)(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)+R_n(x) \tag{29}$$

となる。ここに、$A$ を代入すれば、$f_A(A)=O$ より $A^n=R_n(A)$ となるから、結局 $R_n(x)$ を求めればよいことがわかる。

(29) で $x=\alpha,\beta,\gamma$ とすれば、

$$\alpha^n=R_n(\alpha),\quad \beta^n=R_n(\beta),\quad \gamma^n=R_n(\gamma) \tag{30}$$

となるので、後は (30) を満たす 2 次関数 $R_n(x)$ を求めればよいが、それは、最終的には、(24) の $N=3$ の場合の式

$$R_n(x)=\frac{(x-\beta)(x-\gamma)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}\alpha^n+\frac{(x-\gamma)(x-\alpha)}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)}\beta^n+\frac{(x-\alpha)(x-\beta)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}\gamma^n$$

となる。

重解を持つ場合も同様で、$f_A(x)=(x-\alpha)^2(x-\beta)$ $(\alpha\neq\beta)$ の場合、

$$x^n=Q_n(x)f_A(x)+R_n(x)=Q_n(x)(x-\alpha)^2(x-\beta)+R_n(x) \tag{31}$$

とすると、$R_n(x)$ は

$$\alpha^n=R_n(\alpha),\quad \beta^n=R_n(\beta),\quad n\alpha^{n-1}=R'_n(\alpha) \tag{32}$$

を満たすことがわかる。最後の式は、(31) の両辺を微分して $x=\alpha$ としたものである。よって、$R_n(x)$ を $\alpha$ でテイラー展開した形で考え

$$R_n(x)=a+b(x-\alpha)+c(x-\alpha)^2$$

とすれば、$a = R_n(\alpha) = \alpha^n$, $b = R'_n(\alpha) = n\alpha^{n-1}$ となり、

$$R_n(\beta) = \alpha^n + n\alpha^{n-1}(\beta - \alpha) + c(\beta - \alpha)^2 = \beta^n$$

より、$c$ は

$$c = \frac{\beta^n - \alpha^n}{(\beta - \alpha)^2} - \frac{n\alpha^{n-1}}{\beta - \alpha}$$

となり、結局、

$$R_n(x) = \alpha^n + n\alpha^{n-1}(x - \alpha) + \left( \frac{\beta^n - \alpha^n}{(\beta - \alpha)^2} - \frac{n\alpha^{n-1}}{\beta - \alpha} \right)(x - \alpha)^2$$

となり、ここから (27) が得られることになる。

$f_A(x) = (x - \alpha)^3$ の場合は、

$$x^n = Q_n(x) f_A(x) + R_n(x) = Q_n(x)(x - \alpha)^3 + R_n(x) \tag{33}$$

とすると、$R_n(x)$ は

$$\alpha^n = R_n(\alpha), \quad n\alpha^{n-1} = R'_n(\alpha) \quad n(n-1)\alpha^{n-2} = R''_n(\alpha) \tag{34}$$

となるので、$R_n(x)$ は、

$$\begin{aligned} R_n(x) &= R_n(\alpha) + R'_n(\alpha)(x - \alpha) + \frac{R''_n(\alpha)}{2} a(x - \alpha)^2 \\ &= \alpha^n + n\alpha^{n-1}(x - \alpha) + \frac{n(n-1)}{2}\alpha^{n-2}(x - \alpha)^2 \end{aligned}$$

となって (28) が得られる。

なお、この場合の $R_n(x)$ は、二項定理を使って、

$$\begin{aligned} x^n &= (x - \alpha + \alpha)^n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (x - \alpha)^k \alpha^{n-k} \\ &= Q_n(x)(x - \alpha)^3 + \binom{n}{2} (x - \alpha)^2 \alpha^{n-2} + \binom{n}{1} (x - \alpha)\alpha^{n-1} + \binom{n}{0} \alpha^n \end{aligned}$$

から得ることもできる。

なお、この節の割り算による方法なら、固有方程式の解を求めなくても、具体的な $n$ に対して実際に $x^n$ を $f_A(x)$ で割り算を行って余り $R_n(x)$ を求めることで $A^n$ を計算できる、というメリットもある。

# 8 最後に

本稿では、ケーリー・ハミルトンの公式にもとづいて行列の $n$ 乗を求める方法について論じたが、行列の $n$ 乗は、通常はむしろ固有値と行列の対角化、またはジョルダン標準形を用いて考察する方が標準的である。なお、この固有値とは、本稿でも説明した固有方程式 $f_A(x) = 0$ の解のことである。

本稿のような方法は、線形代数の本でもあまり紹介されることはないので、逆にそれなりに意味があるかもしれない。

# 参考文献

[1] 石原繁、浅野重初「理工系の基礎 線形代数」(1995)、裳華房