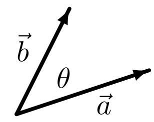
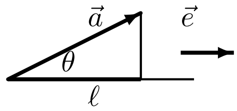
ベクトルの内積と外積

1　ベクトルの内積

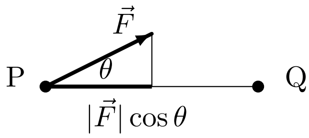
- $\vec{a}\cdot\vec{b} =$ ベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の **内積**、または **スカラー積** (値がスカラー)。　$((\vec{a},\vec{b})$ や $\langle\vec{a},\vec{b}\rangle$ とも)
- 平面ベクトルの場合:　$\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$ のとき、$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$,
  空間ベクトルの場合:　$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ のとき、$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$
- 図形的意味:　$\vec{a} \neq \vec{0}$ かつ $\vec{b} \neq \vec{0}$ のとき、　$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$　$(0 \leq \theta \leq \pi)$



- $\vec{a}\cdot\vec{b} > 0 \implies \theta$ は鋭角、　$\vec{a}\cdot\vec{b} < 0 \implies \theta$ は鈍角、
  $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \implies \vec{a} \perp \vec{b}$　$(\theta = 90^\circ)$　$(\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$ のとき$)$,
  $$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$



- 計算法則:　p120 (1)∼(6) (積らしい性質)
- 正射影:　$\vec{e}$ が単位ベクトルのとき、$\vec{a}$ の $\vec{e}$ 方向への正射影 ℓ は、$\ell = |\vec{a}|\cos\theta = \vec{a}\cdot\vec{e}$
- ある物を力 $\vec{F}$ で P から Q まで移動したときの仕事量 W は、$W = (|\vec{F}|\cos\theta)\mathrm{PQ} = \vec{F}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$



2　ベクトルの外積

- $\vec{a}\times\vec{b} =$ ベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の**外積** または **ベクトル積** (値がベクトル)。ただし、$\vec{a}, \vec{b}$ は 空間ベクトル。
- $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ のとき、　$\vec{a}\times\vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2,\ a_3b_1 - a_1b_3,\ a_1b_2 - a_2b_1)$
- 図形的意味 (図 1、ただし座標軸が「右手系」の場合):　$\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$ で、$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が平行でないとき、

  1. $|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta = S$　(平行四辺形の面積)
  2. $\vec{a}\times\vec{b}$ の方向= $\vec{a}, \vec{b}$ の両方に垂直で、$\vec{a}, \vec{b}, \vec{a}\times\vec{b}$ が右手系となる向き

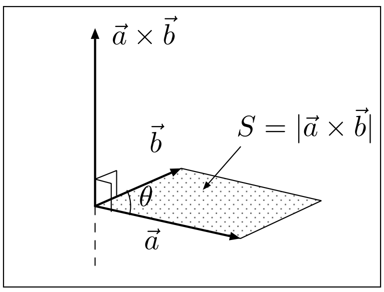


図 1: ベクトルの外積

- 計算方法: (図 3 は $\vec{a}=(3,4,5)$, $\vec{b}=(2,-1,3)$ の場合に $\vec{a}\times\vec{b}=(17,1,-11)$ となる例)。
  (1) $\vec{a}$ の成分を 2 回書き並べ、
  (2) $\vec{b}$ の成分をその下に 2 回書き並べ、
  (3) 両端を削り、
  (4) 斜めにかけて引き算をすればそれが外積の各成分。
  (5) その結果を $\vec{a}$, $\vec{b}$ と内積して 0 となることを確認。
  ($\vec{a}\times\vec{b}$ は $\vec{a}$, $\vec{b}$ に垂直)　(図 3 の例の場合、$51+4-55=0$, $34-1-33=0$)

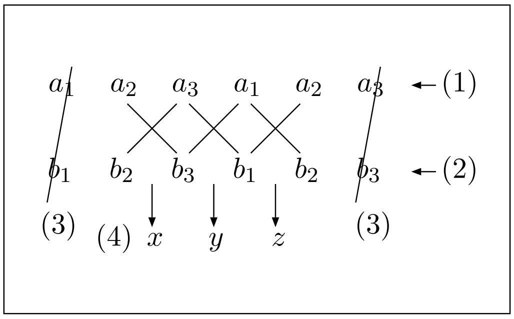


図 2: 外積の成分計算

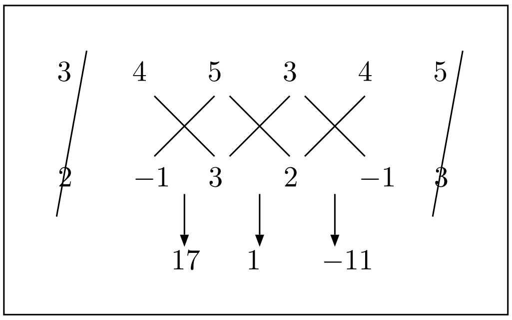


図 3: 成分計算の例

- 基本ベクトルの外積:
  $\vec{e_1}\times\vec{e_2}=\vec{e_3},\quad \vec{e_2}\times\vec{e_3}=\vec{e_1},\quad \vec{e_3}\times\vec{e_1}=\vec{e_2},\quad \vec{e_2}\times\vec{e_1}=-\vec{e_3},\quad \vec{e_3}\times\vec{e_2}=-\vec{e_1},\quad \vec{e_1}\times\vec{e_3}=-\vec{e_2}$

- 外積の性質:

  1. $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0},\quad \vec{b}\times\vec{a}=-\vec{a}\times\vec{b}$
  2. $\vec{a}\neq\vec{0}, \vec{b}\neq\vec{0}$ のとき、$\vec{a}\,/\!/\,\vec{b} \iff \vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$
  3. $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c},\quad (\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$　(分配法則)
  4. $(m\vec{a})\times\vec{b}=m(\vec{a}\times\vec{b}),\quad \vec{a}\times(m\vec{b})=m(\vec{a}\times\vec{b})$
  5. $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{a}=\vec{0},\quad (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{b}=\vec{0}$

- 応用:　空間内の平行四辺形や三角形の面積、2 つのベクトルに垂直なベクトルの計算、角速度ベクトル、回転モーメント、フレミングの法則、電磁気学、流体力学など

内積と外積の比較

項目	内積　$\vec{a}\cdot\vec{b}$	外積　$\vec{a}\times\vec{b}$
値	スカラー値	ベクトル値
交換法則	成立	$\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$
分配法則	成立	成立
同じものの積	$\vec{a}\cdot\vec{a}=\|\vec{a}\|^2$	$\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$
ゼロになるのは	$\vec{a}\perp\vec{b}$ のとき	$\vec{a}\,/\!/\,\vec{b}$ のとき
次元	平面も、空間も	空間のみ