◎ 逆三角関数のビブン

(11.1) $(\sin^{-1}y)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$ ← yで

(11.3) $(\cos^{-1}y)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$

(11.4) $(\tan^{-1}y)' = \dfrac{1}{1+y^2}$

← 教科書と x, y の使い方が逆

← 定理6.1 $\left(\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{\frac{dy}{dx}}\right)$

∵ (11.1) $x = \sin^{-1}y \iff y = \sin x \quad \underset{\sim\sim\sim}{\left(-\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}\right)}$

$(\sin^{-1}y)' = \dfrac{dx}{dy} \underset{\text{定理6.1}}{=} \dfrac{1}{\frac{dy}{dx}} = \dfrac{1}{(\sin x)'} = \dfrac{1}{\cos x}$ —① (yで) (xで)

ここで $\cos^2 x + \underset{y^2}{\sin^2 x} = 1$ より $\cos x = \pm\sqrt{1-y^2}$, $-\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$ では

$\cos x \geqq 0$ より $\cos x = \sqrt{1-y^2}$ これを①に代入 $\Longrightarrow$ (11.1)

(11.3) $x = \cos^{-1}y \iff y = \cos x \quad \underset{\sim\sim\sim}{(0 \leq x \leq \pi)}$

$(\cos^{-1}y)' = \dfrac{dx}{dy} \underset{\text{定理6.1}}{=} \dfrac{1}{\frac{dy}{dx}} = \dfrac{1}{(\cos x)'} = \dfrac{1}{-\sin x}$ —②

ここで $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ より $\sin x = \pm\sqrt{1-y^2}$, $0 \leq x \leq \pi$ では
$\cos^2 x = y^2$

$\sin x \geqq 0$ なので $\sin x = \sqrt{1-y^2}$ これを②に代入 $\Longrightarrow$ (11.3)

(11.4) $x = \tan^{-1}y \iff y = \tan x \quad \left(-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$

$(\tan^{-1}y)' = \dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{\frac{dy}{dx}} = \dfrac{1}{(\tan x)'} = \dfrac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}}$ —③

ここで $\dfrac{1}{\cos^2 x} \underset{(9.17)}{=} \tan^2 x + 1 = y^2 + 1$ これを③に代入 $\Longrightarrow$ (11.4) //

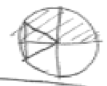
◎ 計算例

(1) $\sin^{-1}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = ?$ ← sinの値が $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ になる, $-\dfrac{\pi}{2} \sim \dfrac{\pi}{2}$ の角度

$\theta = \sin^{-1}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ とすると $\sin\theta = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $-\dfrac{\pi}{2} \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$

より $\theta = -\dfrac{\pi}{4}$ $\quad \therefore \sin^{-1}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \underline{-\dfrac{\pi}{4}}$ ← 1つに決まる

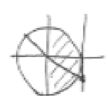
(2) $\cos^{-1}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = ?$ ← cosの値が $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ になる $0 \sim \pi$ の角度



$\theta = \cos^{-1}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ とすると $\cos\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $0 \leq \theta \leq \pi$

より $\theta = \dfrac{5}{6}\pi$ $\quad \therefore \cos^{-1}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \underline{\dfrac{5}{6}\pi}$ ← 1つに決まる

(3) $\tan^{-1}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = ?$ ← tanの値が $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ になる $-\dfrac{\pi}{2} \sim \dfrac{\pi}{2}$ の角度



$\theta = \tan^{-1}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ とすると $\tan\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$

より $\theta = -\dfrac{\pi}{6}$ $\quad \therefore \tan^{-1}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = \underline{-\dfrac{\pi}{6}}$ ← 1つに決まる

(4) $y = x^3 \sin^{-1}x$ のビブン

$(\sin x)^{-1}$ ではない!

$y' = (x^3\sin^{-1}x)' = (x^3)'\sin^{-1}x + x^3(\sin^{-1}x)'$

$= \underline{3x^2\sin^{-1}x + \dfrac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}}$

注 $\sin^{-1}x \neq \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)' \neq \sin^{-1}x$

よくあるまちがい

(5) $y = \tan^{-1}4x$ のビブン

$u = 4x$ とすると $y = \tan^{-1}u \quad \left(\neq \dfrac{1}{\tan u}\right)$

$y' \underset{合}{=} \dfrac{dy}{du} \times \dfrac{du}{dx} = (\tan^{-1}u)' \times (4x)'$

$= \dfrac{1}{1+u^2} \times 4 = \underline{\dfrac{4}{1+16x^2}}$

注 よくあるまちがい

$\tan^{-1}x \neq \dfrac{1}{1+x^2}$

$\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)' \neq \tan^{-1}x$

(6) $y = \cos^{-1}\dfrac{x}{2}$ のビブン

$u = \dfrac{x}{2}$ とすると $y = \cos^{-1}u \quad \left(\neq \dfrac{1}{\cos u}\right)$

$y' \underset{合}{=} \dfrac{dy}{du} \times \dfrac{du}{dx} = (\cos^{-1}u)' \times \left(\dfrac{x}{2}\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \times \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{2\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}$ ← 2を$\sqrt{\ }$の中へ

$= \underline{-\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}}$