平成 13 年 9 月 22 日
(平成 13 年 10 月 20 日 修正)
(平成 24 年 4 月 16 日 修正)

三角関数 $(\sin x, \cos x)$ の微分について

新潟工科大学 情報電子工学科 竹野茂治

1 はじめに

例年、三角関数 $\sin x$, $\cos x$ の微分の公式

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x \tag{1}$$

については説明を避けている。それは、使っている教科書がたいてい

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

と三角関数の和 $\rightarrow$ 積の公式を使って証明しているからで、これは本筋からかなり離れた話になってしまう気がしているからである。

しかし、不定積分の公式を学ぶためだと思うが、どうしても $\sin x$ の微分と $\cos x$ の微分のどちらに $-$(マイナス) がつけるのかを間違えている学生が出てくる。少なくともこの間違いだけは無くそうと、グラフで説明したり、関数の増加等で説明したが、どうも今一つであった。

それを、三角関数の微分が何故そうなるかをもう少し幾何学的に説明することで (やや厳密性には欠けるが) なんとかならないかと考えたことがあり、それを今回まとめておくことにした。ただし、必ずしも分かりやすくなっているかどうかは少し疑問も残る。

2 $\sin x$ の微分

まず、関数 $y = f(x)$ の導関数の定義は

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

である。ここで、Δy は x の増加分 Δx に対する y の増加分を表していて、f を使って書き表すと

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$$

となる。

さて、三角関数 $\cos\theta$、$\sin\theta$ (θ の単位はラジアン) の値は、単位円の中心角 θ に対する円周上の点の x 座標と y 座標で与えられることを思い出す (図 1)。

よって、$\cos\theta$、$\sin\theta$ の導関数を求める場合、それぞれ

$$\Delta x = \cos(\theta+\Delta\theta) - \cos\theta, \quad \Delta y = \sin(\theta+\Delta\theta) - \sin\theta$$

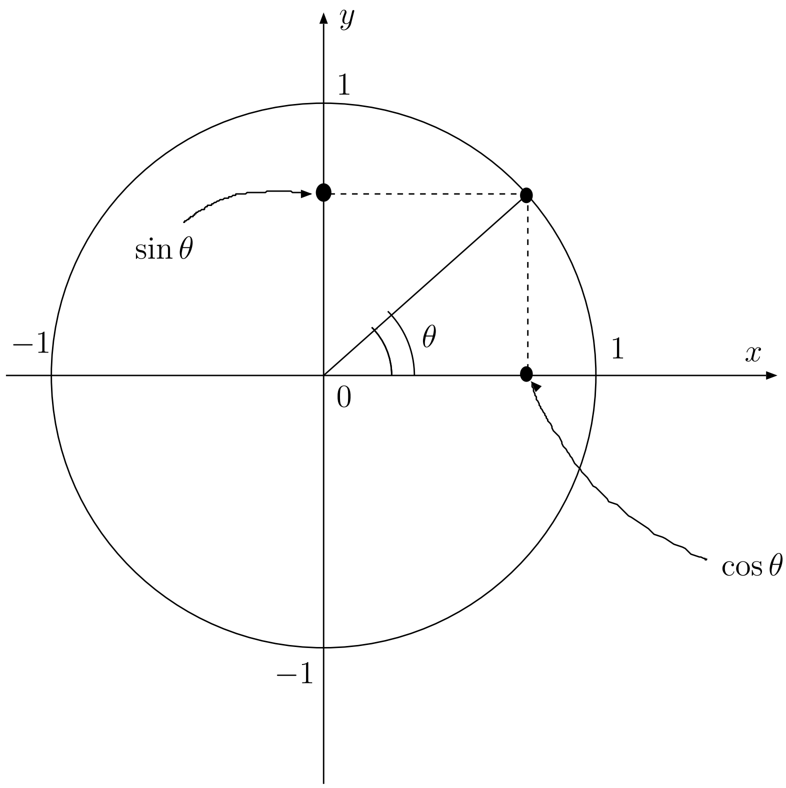

図 1: $\sin\theta, \cos\theta$ と単位円

と $\Delta\theta$ との比の極限を求めることになる

$$(\cos\theta)' = \lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta\theta}, \quad (\sin\theta)' = \lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta\theta}$$

(図 2)。図 2 上では Δx は x 方向の移動幅 (負の値)、Δy は y 方向の移動幅として表されていて、$\Delta\theta$ は角度変化分であるが、弧度法の角度と弧の長さの関係から、移動した分の弧の長さとしても表されることになる。

そして、$\Delta\theta$ を 0 に近づけて行くとき、$\Delta\theta$ が 0 に近ければ、この $\Delta x, \Delta y, \Delta\theta$ は、弧の部分を、点 $(\cos\theta, \sin\theta)$ での接線で置き換えた図で考えたもので近似できると考えられる (図 3,4)。

この接線で近似した図 5 で三角形 PQR を考える。

この三角形 PQR は、角 R が直角の直角三角形であり、角 P は θ に等しく

$$PR \approx \Delta y, \quad QR \approx -\Delta x, \quad PQ \approx \Delta\theta$$

となっている。よって、

$$\frac{\Delta x}{\Delta\theta} \approx -\frac{QR}{PQ} = -\sin\theta, \quad \frac{\Delta y}{\Delta\theta} \approx \frac{PR}{PQ} = \cos\theta$$

となり、$\Delta\theta \to 0$ のとき、この近似は厳密に等しい等号になると考えられる。ゆえに

$$(\cos\theta)' = \lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta\theta} = -\sin\theta, \quad (\sin\theta)' = \lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta\theta} = \cos\theta$$

となる。

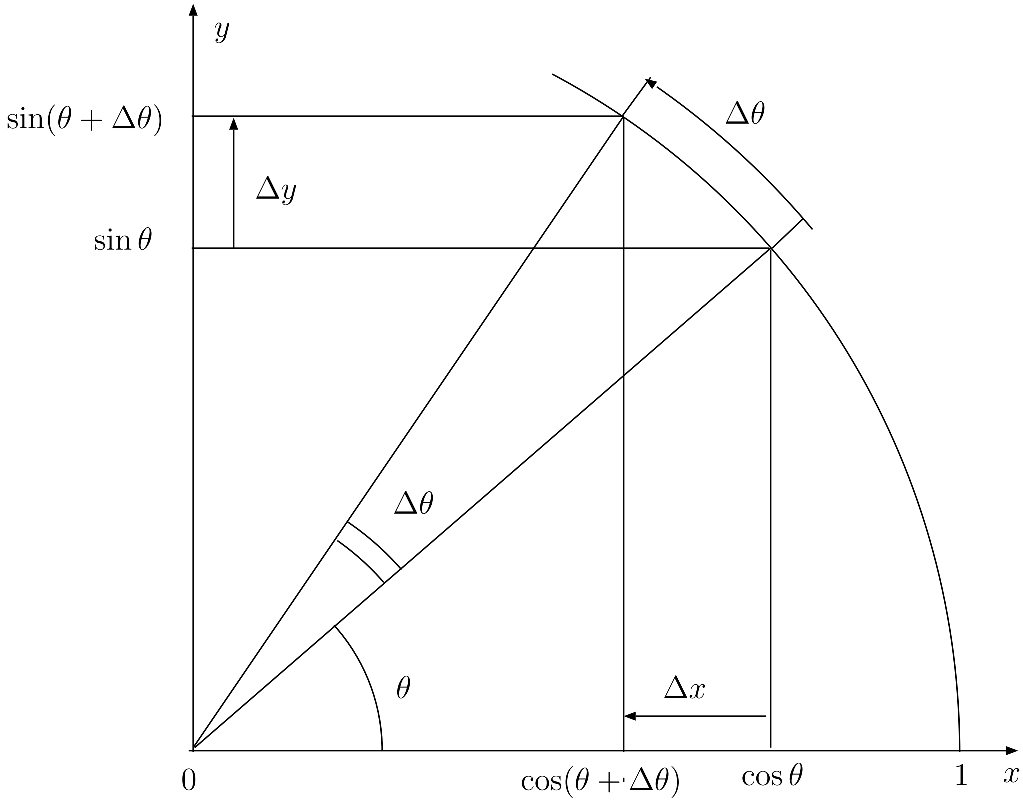

図 2: $\Delta\theta$, Δx, Δy

3　最後に

この方法は、これらの図を思い出せれば、あるいは自分でこれらの図を書ければ、最初に上げた符号のミスは無くせるかも知れないが、その符号を覚えることと、これらの図を書くを書くことでは明らかに前者の方がやさしく、標準的な方法よりはやさしくなったかもしれないが、まだまだ簡単にそうだと理解できるレベルではなく、今後もより良い説明を検討していく必要があると思われる。

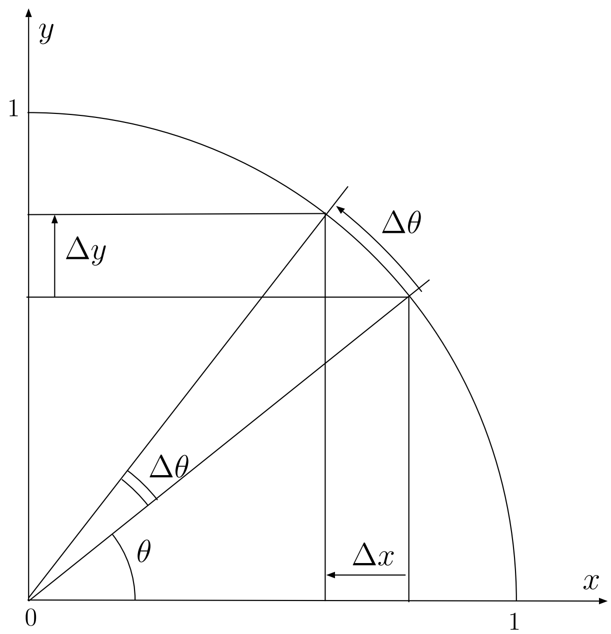

図 3: 厳密な $\Delta\theta$, Δx, Δy

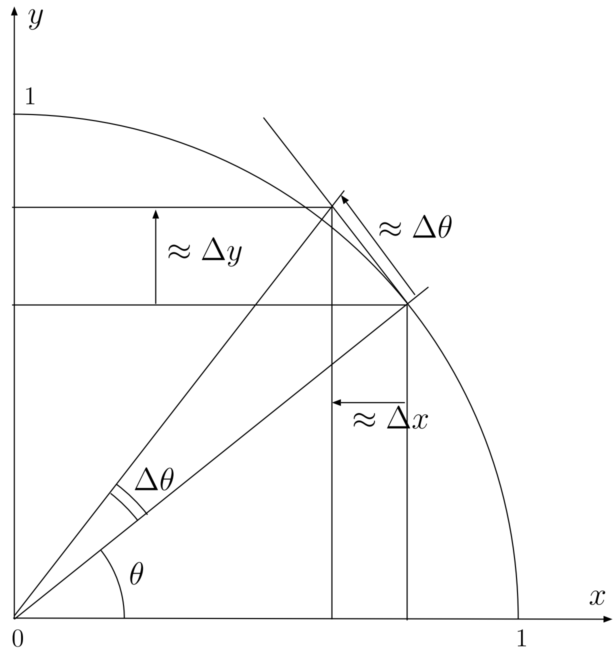

図 4: 弧を接線で近似

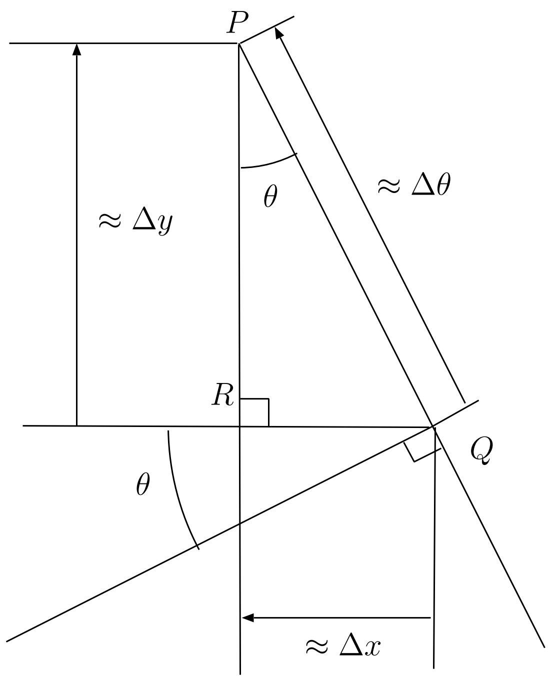

図 5: 三角形 PQR