2017 年後期

# 複素数 (基礎数理 II(a) 講義資料)

(http://takeno.iee.niit.ac.jp/%7Eshige/math/lecture/b2ensyu/hwsol/2017/complex1.pdf)

## 1 複素数の基本的な計算

- 用語等
  - **虚数単位** $i$: $i^2=-1$ となる「数」(の一つ)。$i=\sqrt{-1}$ と書くこともある。(注: 分野によっては $i$ の代わりに $j$ を使う場合もある。)
  - **複素数**：$a+bi$ ($a$, $b$ は実数) の形に表される「数」。
  - $b=0$ の複素数 $a+0i$ は実数 $a$ と考える (実数全体は複素数全体に含まれる)。
  - **虚数** $=b\neq 0$ の複素数 (実数ではない複素数)
  - $a=0$ で $b\neq 0$ の複素数 $0+bi=$ **純虚数**
  - $z=a+bi$ の $a$ を $z$ の **実部** または **実数部分** $=\mathrm{Re}(z)$ と書く。
  - $z=a+bi$ の $b$ を $z$ の **虚部** または **虚数部分** $=\mathrm{Im}(z)$ と書く。
  - $z=a+bi$ に対して $a-bi$ を $z$ の **共役** $=\bar{z}$ と書く。
  - $z=a+bi$ と $w=c+di$ が $z=w$ となるのは、$a=c$ かつ $b=d$ のとき。

  <u>注意</u>: 複素数には $w\leq z$ 等の大小関係はない (定義されない)。

- 性質
  1. $i^2=-1$, $i^3=-i$, $i^4=1$
  2. $z=a+bi=0\Leftrightarrow a=b=0$

**問 1** 次の値を求めなさい。
(1) $i^{10}$ (2) $\mathrm{Re}(3+5i)$ (3) $\mathrm{Im}(-3i)$ (4) $\overline{3+5i}$
(5) $\overline{2x+3i}=5-4yi$ のときの実数 $x$, $y$ の値

- 複素数の和、差、積は、$i$ を文字と考えて、普通の式と同様に展開、整理する。ただし、$i^2$ は $-1$ に置きかえる。
  - $(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$
    $(\mathrm{Re}(z+w)=\mathrm{Re}(z)+\mathrm{Re}(w),\quad \mathrm{Im}(z+w)=\mathrm{Im}(z)+\mathrm{Im}(w))$

- $(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$
  $(\mathrm{Re}(z-w)=\mathrm{Re}(z)-\mathrm{Re}(w),\quad \mathrm{Im}(z-w)=\mathrm{Im}(z)-\mathrm{Im}(w))$
- $(a+bi)(c+di)=(ac+bdi^2)+(ad+bc)i=(ac-bd)+(ad+bc)i$

- 複素数の商は、分母の共役複素数を分子分母にかけて、分母を実数化して $A+Bi$ の形にする。ただし分母が純虚数なら、分子分母の $i$ 倍でよい ($-ci$ 倍の必要はない)。
  - $\dfrac{a+bi}{c+di}=\dfrac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\dfrac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}+\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}i$
  - $\dfrac{a+bi}{ci}=\dfrac{(a+bi)i}{ci^2}=\dfrac{ai-b}{-c}=\dfrac{b}{c}-\dfrac{a}{c}i$
- $zw=0$ ならば $z=0$ かまたは $w=0$

例:

◇ $(1+3i)(5-2i)=5-2i+15i-6i^2=11+13i$

◇ $\dfrac{1+3i}{5-2i}=\dfrac{(1+3i)(5+2i)}{(5-2i)(5+2i)}=\dfrac{5+2i+15i+6i^2}{25-4i^2}=\dfrac{-1+17i}{29}=-\dfrac{1}{29}+\dfrac{17}{29}i$

**問 2** $z=2+3i,\ w=3-4i$ に対し、次の複素数を求めなさい。
(1) $2z-3w$ (2) $wz$ (3) $w\bar{w}$ (4) $\dfrac{z}{w}$ (5) $\dfrac{i}{w}$ (6) $\dfrac{z}{i}$

- 共役の性質
  1. $\overline{(\bar{z})}=z$
  2. $\overline{z+w}=\bar{z}+\bar{w},\quad \overline{z-w}=\bar{z}-\bar{w}$
  3. $\overline{zw}=\bar{z}\,\bar{w},\quad \overline{\left(\dfrac{z}{w}\right)},=\dfrac{\bar{z}}{\bar{w}}$
  4. $z=a+bi$ のとき $z\bar{z}=a^2+b^2$
  5. $\mathrm{Re}(z)=\dfrac{z+\bar{z}}{2},\quad \mathrm{Im}(z)=\dfrac{z-\bar{z}}{2i}$
  6. $\bar{z}=z$ ならば $z$ は実数、$\bar{z}=-z$ ならば $z$ は純虚数

**問 3** $z=-3+5i,\ w=2-7i$ に対して、
(1) $\overline{z+w}$ と $\bar{z}+\bar{w}$ を計算して、それらが等しいかを確かめなさい。
(2) $\overline{zw}$ と $\bar{z}\,\bar{w}$ を計算して、それらが等しいかを確かめなさい。

# 2 負の平方根と方程式の解

- 正の実数 $a\ (>0)$ に対し、$\sqrt{-a}=\sqrt{a}\,i$
- 2 乗して $-a$ になるのは、$\pm\sqrt{-a}=\pm\sqrt{a}\,i$ の 2 つ。
- 注意:
  - ◦ $a>0,\ b>0$ の場合、$\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ は正しいが、$\sqrt{-a}\sqrt{-b}=\sqrt{ab}$ は正しくない。正しくは $\sqrt{-a}\sqrt{-b}=(\sqrt{a}\,i)(\sqrt{b}\,i)=\sqrt{ab}\,i^2=-\sqrt{ab}$ となる。
    (先に $i$ を外に出してから計算しないといけない)
  - ◦ 同様に $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{-b}}\neq\sqrt{-\dfrac{a}{b}}\ \left(\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{-b}}=\dfrac{\sqrt{a}}{i\sqrt{b}}=-\sqrt{\dfrac{a}{b}}\,i\right)$

例:

◇ $\sqrt{-3}\sqrt{-12}=\sqrt{3}\,i\sqrt{12}\,i=\sqrt{36}\,i^2=-6$

◇ $\dfrac{\sqrt{20}}{\sqrt{-5}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{i\sqrt{5}}=\dfrac{2i}{i^2}=-2i$

**問 4**　次の計算をしなさい。
(1) $\sqrt{-8}-\sqrt{-18}$　(2) $\sqrt{-5}\times\sqrt{-20}$　(3) $\dfrac{3}{\sqrt{-3}}$

**問 5**　次の解を求めなさい。
(1) $x^2=-5$　(2) $4x^2+25=0$

- 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式 $D=b^2-4ac$ が負の場合は、2 つの解は複素数となる (一方は他方の共役)。

例:

◇ $x^2+3x+5=0$ の解は $x=\dfrac{-3\pm\sqrt{9-20}}{2}=\dfrac{-3\pm\sqrt{11}\,i}{2}=-\dfrac{3}{2}\pm\dfrac{\sqrt{11}}{2}\,i$

◇ $x^3=-1$ の解は、$x^3+1=0$ を因数分解して $(x+1)(x^2-x+1)=0$ より、$x=-1,\ \dfrac{1\pm\sqrt{1-4}}{2}=-1,\ \dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,i$

**問 6**　次の方程式の解を求めなさい (複素数の範囲で)。
(1) $x^2-2x+5=0$　(2) $4x^2+x+3=0$

**問 7**　次の方程式の解を求めなさい。
(1) $x^3=8$　(2) $x^4=1$

# 3 複素数平面

- $z = a + bi$ を $xy$ 平面上の点 $(a, b)$ と対応させると、複素数を平面上の点で表せる (1 対 1)。その平面を **複素数平面** または **ガウス平面** と呼ぶ (図 1)。
- 複素数平面の $x$ 軸上の点 $z = a + 0i =$ 実数 $\Longrightarrow$ $x$ 軸 $=$ **実軸** (または **実数軸**)
- 複素数平面の $y$ 軸上の点 $z = 0 + bi =$ 純虚数 $\Longrightarrow$ $y$ 軸 $=$ **虚軸** (または **虚数軸**)
- $z$ と $-z$ は原点対称、$z$ と $\bar{z}$ は実軸対称 (図 2)。

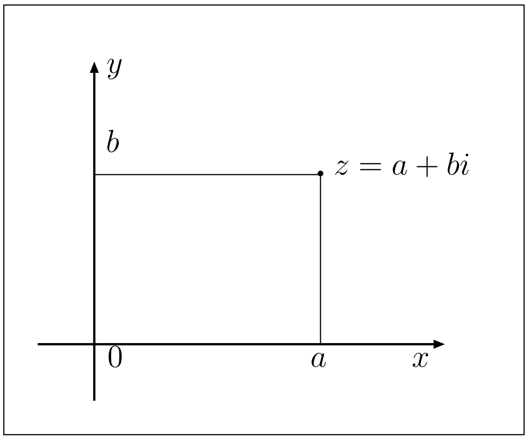


図 1: 複素数平面

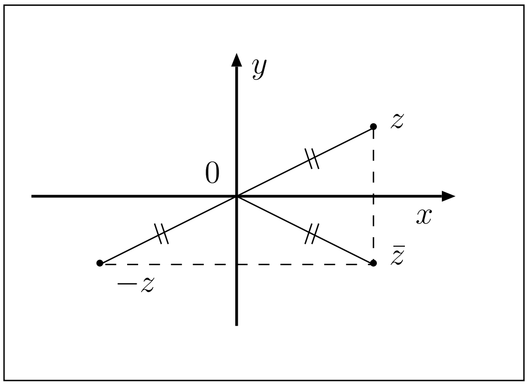


図 2: 対称性

**問 8** 次の複素数を、複素数平面に図示しなさい。

(1) $2 - i$ (2) $-\dfrac{1}{2} + i$ (3) $-3i$ (4) $5$ (5) $\dfrac{1}{-1+i}$ (6) $(\sqrt{3} + i)^2$
(7) $\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}$

- 複素数平面上の $z$ と $w$ の和、差は、平面ベクトルの和、差と同じ (図 3)
- 複素数 $z = a + bi$ の **絶対値** $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ (原点と $z$ との距離) (図 4)。
- 絶対値の性質

1. $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
2. $|\bar{z}| = |z|$
3. $z\bar{z} = |z|^2$
4. $|zw| = |z|\,|w|,\quad \left|\dfrac{z}{w}\right| = \dfrac{|z|}{|w|}$

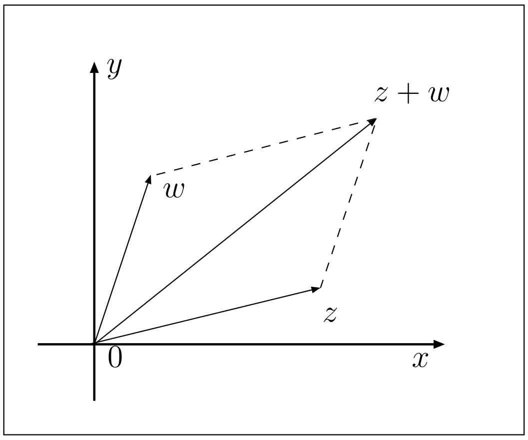


図 3: 複素数の和

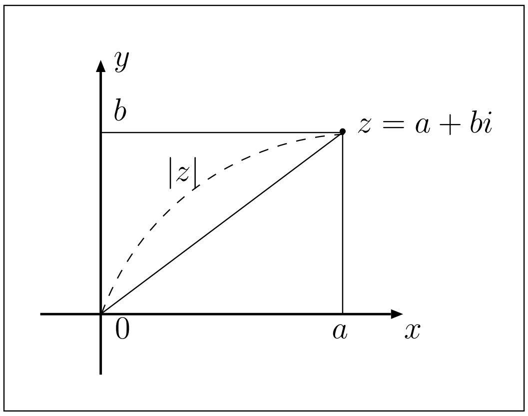


図 4: 絶対値

例:

◇ $|-2+3i| = \sqrt{(-2)^2+3^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

◇ $\left|\dfrac{1+3i}{2-i}\right| = \dfrac{|1+3i|}{|2-i|} = \dfrac{\sqrt{1+9}}{\sqrt{4+1}} = \sqrt{2}$

**問 9** 次の値を求めなさい。

(1) $|3+4i|$ (2) $|-1+\sqrt{3}\,i|$ (3) $|\sqrt{5}\,i|$ (4) $\left|\dfrac{2}{1+2i}\right|$ (5) $\left|\dfrac{4+i}{4-i}\right|$
(6) $\left|\cos\dfrac{\pi}{3} - i\sin\dfrac{\pi}{3}\right|$

**問 10** $|z| = \sqrt{2}$ のとき、次の値を求めなさい。

(1) $|z^2|$ (2) $|(2+i)z|$ (3) $\left|\dfrac{1}{z}\right|$ (4) $z\bar{z}$

# 4 極形式

- 複素数平面上で、$x$ 軸の正の向きから、原点から $z$ への線分にはかった角 (反時計回り) $=$ $z$ の **偏角** $= \arg(z)$ と書く (図 5)。
- 例えば $\arg(i) = \pi/2 + 2n\pi$ ($n$ は整数) となり偏角は一つには決まらないが、$(-\pi, \pi]$ の範囲の偏角を「偏角の **主値**」と呼び $\mathrm{Arg}(z)$ と書くことがある (例えば $\mathrm{Arg}(i) = \pi/2$)。
- $\arg(z) = \mathrm{Arg}(z) + 2n\pi$
- <u>注意</u>:

  1. 偏角の主値は $[0, 2\pi)$ 等の別の $2\pi$ 幅の範囲で考える流儀もある。

2. $\arg(z) = \arg(w)$ のような偏角に関する等式は、通常 $\mathrm{Arg}(z) = \mathrm{Arg}(w)$ のような意味、すなわち $2\pi$ の整数倍の差を除いて等しいことを意味する。

3. $z = 0$ の場合は偏角 $\arg(z)$ は定められない。

例:

◇ $\mathrm{Arg}(1-i) = -\dfrac{\pi}{4}$, $\arg(1-i) = -\dfrac{\pi}{4} + 2n\pi$

◇ $\mathrm{Arg}(3) = 0$, $\mathrm{Arg}(-3) = \pi$

注意: $\mathrm{Arg}(-z) \neq -\mathrm{Arg}(z)$

**問 11** 次の偏角を求めなさい。
(1) $\mathrm{Arg}(-3i)$ (2) $\mathrm{Arg}(1+i)$ (3) $\mathrm{Arg}(-\sqrt{3}-i)$ (4) $\mathrm{Arg}(5)$ (5) $\mathrm{Arg}(-10)$
(6) $\mathrm{Arg}\left(\cos\dfrac{\pi}{3} - i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$

- $z = a+bi \neq 0$ のとき、$r = |z|$, $\theta = \arg(z)$ (の一つ) とすると、$a = \mathrm{Re}(z) = r\cos\theta$, $b = \mathrm{Im}(z) = r\sin\theta$ となり、$z = r\cos\theta + (r\sin\theta)i = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ の形に書けるが、この最後の式を $z$ の **極形式** と呼ぶ (図 6)。

- 注意

  ◦ $r = 1$ の場合は、カッコは不要。

  ◦ 極形式では、$r$ は必ず $r \geq 0$ の形にする。

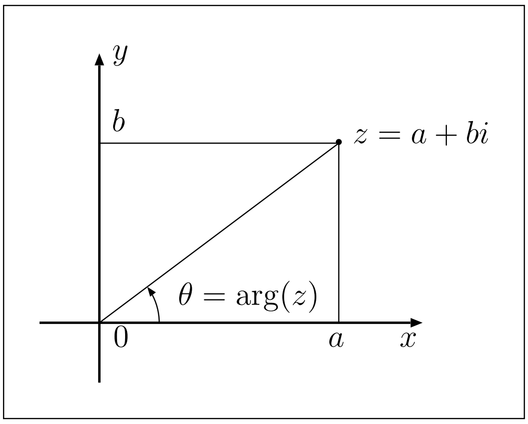


図 5: 偏角

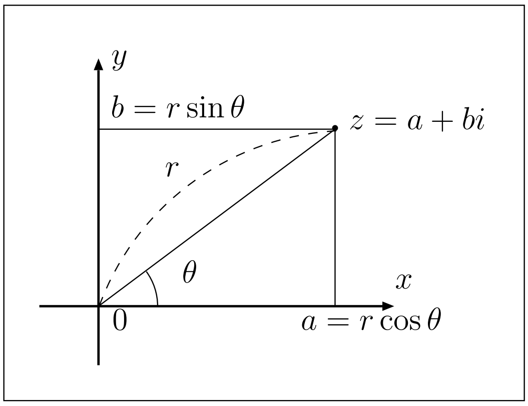


図 6: 極形式

例:

◇ $z = 1 - i$ は、$|z| = \sqrt{2}$, $\mathrm{Arg}(z) = -\dfrac{\pi}{4}$ より、$z = \sqrt{2}\left\{\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right\}$
$\left(= \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{7\pi}{4} + i\sin\dfrac{7\pi}{4}\right)\right)$

**問 12**　次の複素数の絶対値と偏角を求め、極形式で表しなさい。

(1) $2+2i$　(2) $-3i$　(3) $-2\sqrt{3}+2i$　(4) $-3$

- 偏角、極形式に関する性質 ($z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, $w = R(\cos\phi + i\sin\phi)$ とする)

1. $|\cos\theta + i\sin\theta| = 1$
2. $\overline{\cos\theta + i\sin\theta} = \cos\theta - i\sin\theta = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta)$
3. $(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\phi + i\sin\phi) = \cos(\theta+\phi) + i\sin(\theta+\phi)$
4. $\dfrac{\cos\theta + i\sin\theta}{\cos\phi + i\sin\phi} = \cos(\theta-\phi) + i\sin(\theta-\phi)$, 特に $\dfrac{1}{\cos\phi + i\sin\phi} = \cos\phi - i\sin\phi$
5. $\arg(\bar{z}) = -\arg(z)$、すなわち $\bar{z} = r\{\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\}$
6. $\arg(zw) = \arg(z) + \arg(w)$、　すなわち $zw = rR\{\cos(\theta+\phi) + i\sin(\theta+\phi)\}$
(複素数平面上では、$zw$ は、$z$ を原点の回りに (反時計回りに) $\phi$ だけ回転し、原点からの距離を $R$ 倍したもの (図 7))
7. $\arg\left(\dfrac{z}{w}\right) = \arg(z) - \arg(w)$、　すなわち $\dfrac{z}{w} = \dfrac{r}{R}\{\cos(\theta-\phi) + i\sin(\theta-\phi)\}$
(複素数平面上では、$z/w$ は、$z$ を $-\phi$ だけ回転し、原点からの距離を $1/R$ 倍したもの (図 7))、特に
$\arg\left(\dfrac{1}{w}\right) = -\arg(w)$、すなわち $\dfrac{1}{w} = \dfrac{1}{R}(\cos\phi - i\sin\phi)$

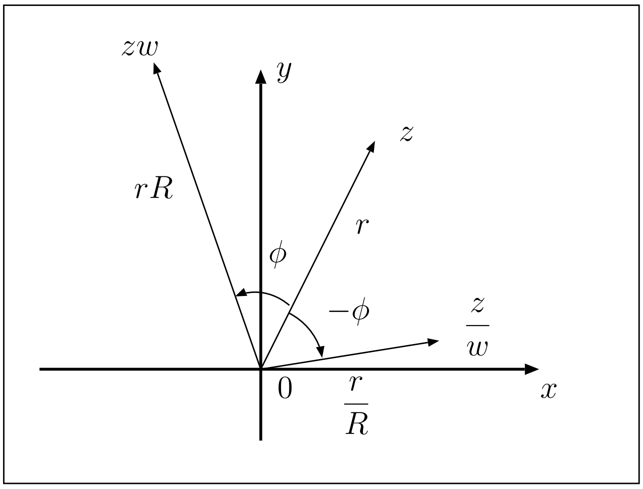


図 7: 積、商

例:

◇ $z = 3\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$, $w = 4\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$ のとき、

$$\circ\ zw = 12\left\{\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)\right\} = 12\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$$

$$\circ\ \frac{z}{w} = \frac{3}{4}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\right\} = \frac{3}{4}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

◇ $iz$ は、$z$ を反時計回りに $\dfrac{\pi}{2}$ 回転したもの。

**問 13** $|z| = 3$, $\mathrm{Arg}(z) = \pi/5$ のとき、次の複素数を極形式で表しなさい。
(1) $\bar{z}$ (2) $iz$ (3) $z^2$ (4) $\dfrac{5}{z}$

**問 14** $z = 5 - \sqrt{3}\,i$ を、反時計回りに $\dfrac{\pi}{3}$ 回転した複素数を $a + bi$ の形に表しなさい。

# 5 ド・モアブルの公式

- ド・モアブルの公式: $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$ ($n$: 整数)
- $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ のとき、$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$
- $z^n = \alpha$ の解 ($\alpha$ の $n$ 乗根) は、$\alpha = R(\cos\phi + i\sin\phi)$, $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ とすれば、$r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = R(\cos\phi + i\sin\phi)$ より、$r^n = R$, $n\theta = \phi + 2k\pi$ となるので、

$$z = \sqrt[n]{R}\left\{\cos\left(\frac{\phi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\phi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right\} \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1)$$

例:

◇ $(-1 + \sqrt{3}\,i)^5 = \left\{2\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)\right\}^5 = 2^5\left(\cos\dfrac{10\pi}{3} + i\sin\dfrac{10\pi}{3}\right)$
$= 32\left(-\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -16 - 16\sqrt{3}\,i$

◇ $z^2 = i$ の解は、$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ $(r > 0)$ とすると、$z^2 = r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)$, $i = \cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}$ より、$r^2 = 1$, $2\theta = \pi/2 + 2n\pi$。よって $r = 1$, $\theta = \pi/4 + n\pi$ なので、$z = \cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}$, $\cos\dfrac{5\pi}{4} + i\sin\dfrac{5\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$, $-\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$

**問 15** 次の値を求めなさい。
(1) $\left(\cos\dfrac{\pi}{15} + i\sin\dfrac{\pi}{15}\right)^{10}$ (2) $(1+i)^8$

**問 16** $z^3 = 1$ となる $z$ を極形式で表しなさい。

- ド・モアブルの公式を逆に見て、実部と虚部に分ければ、cos, sin の $n$ 倍角の公式が得られる。

例:

◇ $\cos 3\theta = \mathrm{Re}(\cos 3\theta + i \sin 3\theta) = \mathrm{Re}((\cos\theta + i\sin\theta)^3) = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta$
$= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ (cos の 3 倍角の公式)

**問 17** $\sin 3\theta$ を $\sin\theta$ で表しなさい (sin の 3 倍角の公式)

# 6 オイラーの公式

- **オイラーの公式**: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ ($\theta$: 実数)
  (極形式の「方向部分」が $e$ の純虚数乗となる)
- 注意: 「オイラーの公式」は「公式」とついているが、実数乗ではない新たな指数なので、むしろ「定義」のようなもの。ただし、こう定義するのが自然である状況証拠はいくつかある。(テイラー展開、指数法則、微分の性質等。詳細は省略。)
- 新たな極形式: $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$
- 性質:
  1. $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$
  2. $|e^{i\theta}| = 1, \quad \arg(e^{i\theta}) = \theta + 2n\pi$
  3. $e^{i\theta}e^{i\phi} = e^{i(\theta+\phi)}, \quad e^{i\theta}/e^{i\phi} = e^{i(\theta-\phi)}$
  4. 整数 $n$ に対して $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ (ド・モアブルの定理)
  5. $e^{2\pi i} = 1, \quad e^{i(\theta+2\pi)} = e^{i\theta}$

例:

◇ $e^{2\pi i/3} = \cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

◇ 逆に $-1 + \sqrt{3}\,i = 2\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right) = 2e^{2\pi i/3}$

**問 18** 次の値を、$a + bi$ の形の複素数に直しなさい。
(1) $e^{\pi i/3}$ (2) $e^{5\pi i/6}$ (3) $e^{-3\pi i/4}$ (4) $e^{\pi i}$ (5) $\overline{e^{\pi i/2}}$ (6) $e^{3\pi i/2}e^{-5\pi i/4}$
(7) $\dfrac{1}{e^{-7\pi i/6}}$

**問 19**　問 12 の極形式を、$re^{i\theta}$ の形の極形式で表しなさい。

- $e$ の複素数乗:　$e^z = e^{x+yi} = e^x e^{yi} = e^x(\cos y + i \sin y)$
- 性質 ($z = x + yi$, $w = a + bi$: 複素数):
  1. $\overline{e^z} = e^{\bar{z}} = e^x e^{-iy}$
  2. $|e^z| = e^x = e^{\mathrm{Re}(z)}$,　$\arg(e^z) = y + 2n\pi = \mathrm{Im}(z) + 2n\pi$
  3. $e^z e^w = e^{z+w}$,　$e^z/e^w = e^{z-w}$
  4. $(e^z)^n = e^{nz} = e^{nx}e^{iny}$
  5. $\mathrm{Re}(e^z) = e^x \cos y$,　$\mathrm{Im}(e^z) = e^x \sin y$
  6. $e^{z+2\pi i} = e^z$

例:

◇ $e^{1+2i} = e^1 e^{2i} = e(\cos 2 + i \sin 2)$

◇ $e^{1+2i}/e^{3-4i} = e^{(1+2i)-(3-4i)} = e^{-2+6i} = e^{-2}(\cos 6 + i \sin 6)$

◇ $\mathrm{Arg}(e^{1-4i}) = \mathrm{Arg}(e^{1+(2\pi-4)i}) = 2\pi - 4$　($-4$ は $-4 < -\pi$ より主値の範囲に入らない)

**問 20**　次の値を求めなさい。

(1) $|e^{3+2i}|$　(2) $\mathrm{Re}(e^{-4+3i})$　(3) $\mathrm{Im}(ie^{2+5i})$　(4) $\arg(e^{1-5i})$

**問 21**　$z^4 = 2$ となる $z$ を、$re^{i\theta}$ の形の極形式で表しなさい。

# 7　応用例

- 複素数値関数
  - 独立変数 $x$ は実数を動くが、値が複素数値の関数 $f(x)$ を**複素数値関数**と呼ぶ。
  - $\mathrm{Re}(f(x)) = p(x)$, $\mathrm{Im}(f(x)) = q(x)$ とすると、$f(x) = p(x) + iq(x)$
  - $f(x)$ の微分、積分は、$i = \sqrt{-1}$ は定数なので、以下のように考える。

$$f'(x) = p'(x) + iq'(x), \quad \int f(x)dx = \int p(x)dx + i\int q(x)dx,$$
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b p(x)dx + i\int_a^b q(x)dx$$

- $\circ$ $\mathrm{Re}(f(x))' = \mathrm{Re}(f'(x))$, $\mathrm{Im}(f(x))' = \mathrm{Im}(f'(x))$
- $\circ$ $\mathrm{Re}\left(\int f(x)dx\right) = \int \mathrm{Re}(f(x))dx,\ \ \mathrm{Im}\left(\int f(x)dx\right) = \int \mathrm{Im}(f(x))dx$

- 複素数の定数 $\alpha$ に対して、

$$(e^{\alpha x})' = \alpha e^{\alpha x},\ \ \int e^{\alpha x}dx = \frac{1}{\alpha}e^{\alpha x} + C\ \ (C = C_1 + iC_2)$$
$$\left((e^{(a+bi)x})' = (a+bi)e^{(a+bi)x},\ \ \int e^{(a+bi)x}dx = \frac{1}{a+bi}e^{(a+bi)x} + C_1 + iC_2\right)$$

**問 22** $e^{(3+2i)x} = e^{3x}(\cos 2x + i\sin 2x)$ を微分して、それが $(3+2i)e^{(3+2i)x} = (3+2i)e^{3x}(\cos 2x + i\sin 2x)$ に等しいかどうか確認しなさい。

- $e^{ax}\cos bx$ 不定積分は以下のように計算できる (上の積分の実部)。

$$\begin{aligned}\int e^{ax}\cos bx dx &= \int \mathrm{Re}(e^{ax}e^{ibx})dx = \mathrm{Re}\left(\int e^{(a+bi)x}dx\right)\\ &= \mathrm{Re}\left(\frac{1}{a+bi}e^{(a+bi)x}\right) + C\end{aligned}$$

$e^{ax}\sin bx$ もこの積分の虚部を使えば計算できる (いずれも部分積分でも求められるが、部分積分が 2 回必要だったもの)。

- 指数法則 $e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha}e^{i\beta}$ の実部、虚部は、それぞれ cos, sin の加法定理を思い出すのに利用できる。

- $(e^{ix})' = ie^{ix}$ の実部、虚部は、それぞれ $(\cos x)' = -\sin x$, $(\sin x)' = \cos x$ になっている。

例:

$\diamond$ $\displaystyle\int e^{2x}\cos 3x\,dx = \mathrm{Re}\left(\int e^{(2+3i)x}\,dx\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2+3i}e^{(2+3i)x}\right) + C$

$\displaystyle= \frac{e^{2x}}{13}\mathrm{Re}\left((2-3i)(\cos 3x + i\sin 3x)\right) + C = \frac{e^{2x}}{13}(2\cos 3x + 3\sin 3x) + C$

**問 23** $I = \displaystyle\int e^{-4x}\sin 3x\,dx$ を求めなさい。

- $\cos x$, $\sin x$ は指数を用いて $\cos x = \dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$, $\sin x = \dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$ と表すことができる。

- $z(t) = Ae^{i\omega t}$ は、複素数平面乗では原点中心、半径 $A$ の円周上を動き、$t$ が時間であればそれは等速円運動で、その速度 $v(t)$ は $v(t) = z'(t) = Ai\omega e^{i\omega t} = A\omega e^{i(\omega t+\pi/2)}$、角速度は $\omega$ となる。

例:

◇ $n$ 倍角の公式の逆に、$\cos^n x \sin^m x$ を展開の計算で $\cos kx, \sin \ell x$ で表すことができる (積分などで有用)。

$$\sin^3 x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^3 = \frac{1}{8i^3}(e^{3ix} - 3e^{2ix}e^{-ix} + 3e^{ix}e^{-2ix} - e^{-3ix})$$

$$= -\frac{1}{4}\left(\frac{e^{3ix} - e^{-3ix}}{2i}\right) + \frac{3}{4}\left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right) = -\frac{1}{4}\sin 3x + \frac{3}{4}\sin x$$

問 **24** 次のものを $\cos kx, \sin \ell x$ の定数倍の和で表しなさい。
(1) $\cos^3 x$ (2) $\cos^2 x \sin^2 x$

# 参考文献

[1] 俣野博、河野俊丈編、「数学 II」(高等学校教科書)、東京書籍 (2012)

[2] 俣野博、河野俊丈編、「数学 III」(高等学校教科書)、東京書籍 (2014)

[3] 硲野敏博、「理工系の基礎数学」、学術図書出版社 (2007)

[4] 矢野健太郎、石原繁、「基礎解析学 改訂版」、裳華房 (1993)

[5] 金原粲監修、「電気数学」、実教出版 (2008)

# 問の略解

**1 節**

**問 1** (1) $-1$ (2) $3$ (3) $-3$ (4) $3-5i$ (5) $x=\dfrac{5}{2},\ y=\dfrac{3}{4}$

**問 2** (1) $-5+18i$ (2) $18+i$ (3) $25$ (4) $-\dfrac{6}{25}+\dfrac{17}{25}i$ (5) $-\dfrac{4}{25}+\dfrac{3}{25}i$
(6) $3-2i$

**問 3** (1) 略 ($\overline{z+w}=\bar{z}+\bar{w}=-1+2i$) (2) 略 ($\overline{zw}=\bar{z}\,\bar{w}=29-31i$)

**2 節**

**問 4** (1) $-\sqrt{2}\,i$ (2) $-10$ (3) $-\sqrt{3}\,i$

**問 5** (1) $x=\pm\sqrt{5}\,i$ (2) $x=\pm\dfrac{5}{2}\,i$

**問 6** (1) $x=1\pm 2i$ (2) $x=-\dfrac{1}{8}\pm\dfrac{\sqrt{47}}{8}\,i$

**問 7** (1) $x=2,\ x=-1\pm\sqrt{3}\,i$ (2) $x=1,\ -1,\ i,\ -i$

**3 節**

**問 8** 略 $\left((5)\ -\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}i,\quad (6)\ 2+2\sqrt{3}\,i,\quad (7)\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,i\right)$

**問 9** (1) $5$ (2) $2$ (3) $\sqrt{5}$ (4) $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ (5) $1$ (6) $1$

**問 10** (1) $2$ (2) $\sqrt{10}$ (3) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (4) $2$

**4 節**

**問 11** (1) $-\dfrac{\pi}{2}$ (2) $\dfrac{\pi}{4}$ (3) $-\dfrac{5\pi}{6}$ (4) $0$ (5) $\pi$ (6) $-\dfrac{\pi}{3}$

**問 12** (1) $2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$ (2) $3\left(\cos\dfrac{3\pi}{2}+i\sin\dfrac{3\pi}{2}\right)$
(3) $4\left(\cos\dfrac{5\pi}{6}+i\sin\dfrac{5\pi}{6}\right)$ (4) $3(\cos\pi+i\sin\pi)$

**問 13** (1) $3\left\{\cos\left(-\dfrac{\pi}{5}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{5}\right)\right\}$ (2) $3\left(\cos\dfrac{7\pi}{10}+i\sin\dfrac{7\pi}{10}\right)$
(3) $9\left(\cos\dfrac{2\pi}{5}+i\sin\dfrac{2\pi}{5}\right)$ (4) $\dfrac{5}{3}\left\{\cos\left(-\dfrac{\pi}{5}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{5}\right)\right\}$

**問 14** $(5-\sqrt{3}i)\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)=4+2\sqrt{3}\,i$

**5 節**

**問 15** (1) $-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ (2) $16$

**問 16** $z=\cos 0+i\sin 0,\ \cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3},\ \cos\dfrac{4\pi}{3}+i\sin\dfrac{4\pi}{3}$

**問 17** $\sin 3\theta=\mathrm{Im}(\cos 3\theta+i\sin 3\theta)=\mathrm{Im}((\cos\theta+i\sin\theta)^3)=3\cos^2\theta\sin\theta-3\sin^3\theta$
$=3\sin\theta-4\sin^3\theta$

**6 節**

**問 18** (1) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ (2) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$ (3) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$ (4) $-1$ (5) $-i$
(6) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$ (7) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i$

**問 19** (1) $2\sqrt{2}e^{\pi i/4}$ (2) $3e^{3\pi i/2}$ $(=3e^{-\pi i/2})$ (3) $4e^{5\pi i/6}$ (4) $3e^{\pi i}$

**問 20** (1) $e^3$ (2) $e^{-4}\cos 3$ (3) $e^2\cos 5$ (4) $-5+2n\pi$

**問 21** $\sqrt[4]{2}e^{0i},\ \sqrt[4]{2}e^{\pi i/2},\ \sqrt[4]{2}e^{\pi i},\ \sqrt[4]{2}e^{3\pi i/2}$

**7 節**

**問 22** $\{e^{3x}(\cos 2x+i\sin 2x)\}'=3e^{3x}(\cos 2x+i\sin 2x)+2e^{3x}(-\sin 2x+i\cos 2x)$
$=(3+2i)e^{3x}(\cos 2x+i\sin 2x)$

**問 23** $I=\dfrac{e^{-4x}}{25}(-3\cos 3x-4\sin 3x)+C$

**問 24** (1) $\dfrac{1}{4}\cos 3x+\dfrac{3}{4}\cos x$ (2) $-\dfrac{1}{8}\cos 4x+\dfrac{1}{8}$