

複素数 (基礎数理 II(a) 講義資料)
(<http://takeno.iee.niit.ac.jp/%7Eshige/math/lecture/b2ensyu/hwsol/2016/complex1.pdf>)

1 複素数の基本的な計算

- 用語等

- 虚数単位 i : $i^2 = -1$ となる「数」(の一つ)。 $i = \sqrt{-1}$ と書くこともある。
(注: 分野によっては i の代わりに j を使う場合もある。)
- 複素数: $a + bi$ (a, b は実数) の形に表される「数」。
- $b = 0$ の複素数 $a + 0i$ は実数 a と考える (実数全体は複素数全体に含まれる)。
- 虚数 $= b \neq 0$ の複素数 (実数ではない複素数)
- $a = 0$ で $b \neq 0$ の複素数 $0 + bi =$ 純虚数
- $z = a + bi$ の a を z の 実部 または 実数部分 $= \operatorname{Re}(z)$ と書く。
- $z = a + bi$ の b を z の 虚部 または 虚数部分 $= \operatorname{Im}(z)$ と書く。
- $z = a + bi$ に対して $a - bi$ を z の 共役 $= \bar{z}$ と書く。
- $z = a + bi$ と $w = c + di$ が $z = w$ となるのは、 $a = c$ かつ $b = d$ のとき。

注意: 複素数には $w \leq z$ 等の大小関係はない (定義されない)。

- 性質

1. $i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1$
2. $z = a + bi = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$

問 1 次の値を求めなさい。

- (1) i^{10} (2) $\operatorname{Re}(3 + 5i)$ (3) $\operatorname{Im}(-3i)$ (4) $\overline{3 + 5i}$
(5) $\overline{2x + 3i} = 5 - 4yi$ のときの実数 x, y の値

- 複素数の和、差、積は、 i を文字と考えて、普通の式と同様に展開、整理する。ただし、 i^2 は -1 に置きかえる。

- $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$
 $(\operatorname{Re}(z + w) = \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Re}(w), \operatorname{Im}(z + w) = \operatorname{Im}(z) + \operatorname{Im}(w))$

- $(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$
 $(\operatorname{Re}(z - w) = \operatorname{Re}(z) - \operatorname{Re}(w), \operatorname{Im}(z - w) = \operatorname{Im}(z) - \operatorname{Im}(w))$
- $(a + bi)(c + di) = (ac + bdi^2) + (ad + bc)i = (ac - bd) + (ad + bc)i$
- 複素数の商は、分母の共役複素数を分子分母にかけて、分母を実数化して $A + Bi$ の形にする。ただし分母が純虚数なら、分子分母の i 倍でよい ($-ci$ 倍の必要はない)。
- $\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i$
- $\frac{a + bi}{ci} = \frac{(a + bi)i}{ci^2} = \frac{ai - b}{-c} = \frac{b}{c} - \frac{a}{c}i$
- $zw = 0$ ならば $z = 0$ かまたは $w = 0$

例:

$$\diamond (1 + 3i)(5 - 2i) = 5 - 2i + 15i - 6i^2 = 11 + 13i$$

$$\diamond \frac{1 + 3i}{5 - 2i} = \frac{(1 + 3i)(5 + 2i)}{(5 - 2i)(5 + 2i)} = \frac{5 + 2i + 15i + 6i^2}{25 - 4i^2} = \frac{-1 + 17i}{29} = -\frac{1}{29} + \frac{17}{29}i$$

問 2 $z = 2 + 3i, w = 3 - 4i$ に対し、次の複素数を求めなさい。

$$(1) 2z - 3w \quad (2) wz \quad (3) w\bar{w} \quad (4) \frac{z}{w} \quad (5) \frac{i}{w} \quad (6) \frac{z}{i}$$

● 共役の性質

1. $\overline{\bar{z}} = z$
2. $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}, \overline{z - w} = \bar{z} - \bar{w}$
3. $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}, \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$
4. $z = a + bi$ のとき $z\bar{z} = a^2 + b^2$
5. $\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}, \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$
6. $\bar{z} = z$ ならば z は実数、 $\bar{z} = -z$ ならば z は純虚数

問 3 $z = -3 + 5i, w = 2 - 7i$ に対して、

- (1) $\overline{z + w}$ と $\bar{z} + \bar{w}$ を計算して、それらが等しいかを確認なさい。
- (2) $\overline{zw}$ と $\bar{z}\bar{w}$ を計算して、それらが等しいかを確認なさい。

2 負の平方根と方程式の解

- 正の実数 $a (> 0)$ に対し、 $\sqrt{-a} = \sqrt{a}i$
- 2 乗して $-a$ になるのは、 $\pm\sqrt{-a} = \pm\sqrt{a}i$ の 2 つ。
- 注意:
 - $a > 0, b > 0$ の場合、 $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ は正しいが、 $\sqrt{-a}\sqrt{-b} = \sqrt{ab}$ は正しくない。正しくは $\sqrt{-a}\sqrt{-b} = (\sqrt{a}i)(\sqrt{b}i) = \sqrt{ab}i^2 = -\sqrt{ab}$ となる。
(先に i を外に出してから計算しないといけない)
 - 同様に $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{-b}} \neq \sqrt{-\frac{a}{b}} \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{-b}} = \frac{\sqrt{a}}{i\sqrt{b}} = -\sqrt{\frac{a}{b}}i \right)$

例:

$$\begin{aligned} \diamond \sqrt{-3}\sqrt{-12} &= \sqrt{3}i\sqrt{12}i = \sqrt{36}i^2 = -6 \\ \diamond \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{-5}} &= \frac{2\sqrt{5}}{i\sqrt{5}} = \frac{2i}{i^2} = -2i \end{aligned}$$

問 4 次の計算をなさい。

$$(1) \sqrt{-8} - \sqrt{-18} \quad (2) \sqrt{-5} \times \sqrt{-20} \quad (3) \frac{3}{\sqrt{-3}}$$

問 5 次の解を求めなさい。

$$(1) x^2 = -5 \quad (2) 4x^2 + 25 = 0$$

- 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の判別式 $D = b^2 - 4ac$ が負の場合は、2 つの解は複素数となる (一方は他方の共役)。

例:

$$\begin{aligned} \diamond x^2 + 3x + 5 &= 0 \text{ の解は } x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 20}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{11}i}{2} = -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{11}}{2}i \\ \diamond x^3 &= -1 \text{ の解は、} x^3 + 1 = 0 \text{ を因数分解して } (x + 1)(x^2 - x + 1) = 0 \text{ より、} \\ x &= -1, \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4}}{2} = -1, \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{aligned}$$

問 6 次の方程式の解を求めなさい (複素数の範囲で)。

$$(1) x^2 - 2x + 5 = 0 \quad (2) 4x^2 + x + 3 = 0$$

問 7 次の方程式の解を求めなさい。

$$(1) x^3 = 8 \quad (2) x^4 = 1$$

3 複素数平面

- $z = a + bi$ を xy 平面上の点 (a, b) と対応させると、複素数を平面上の点で表せる (1 対 1)。その平面を **複素数平面** または **ガウス平面** と呼ぶ (図 1)。
- 複素数平面の x 軸上の点 $z = a + 0i = \text{実数} \implies x \text{ 軸} = \text{実軸}$ (または **実数軸**)
- 複素数平面の y 軸上の点 $z = 0 + bi = \text{純虚数} \implies y \text{ 軸} = \text{虚軸}$ (または **虚数軸**)
- z と $-z$ は原点对称、 z と $\bar{z}$ は実軸対称 (図 2)。

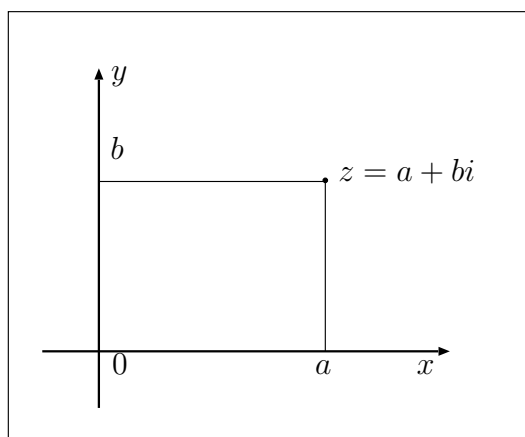


図 1: 複素数平面

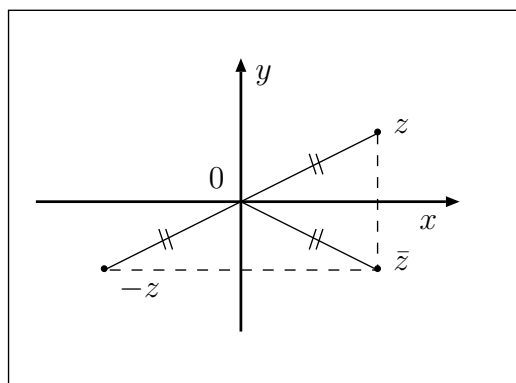


図 2: 対称性

問 8 次の複素数を、複素数平面に図示しなさい。

- (1) $2 - i$ (2) $-\frac{1}{2} + i$ (3) $-3i$ (4) 5 (5) $\frac{1}{-1 + i}$ (6) $(\sqrt{3} + i)^2$
 (7) $\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$

- 複素数平面上の z と w の和、差は、平面ベクトルの和、差と同じ (図 3)
- 複素数 $z = a + bi$ の **絶対値** $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ (原点と z との距離) (図 4)。
- 絶対値の性質

1. $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
2. $|\bar{z}| = |z|$
3. $z\bar{z} = |z|^2$
4. $|zw| = |z||w|, \quad \left| \frac{z}{w} \right| = \frac{|z|}{|w|}$

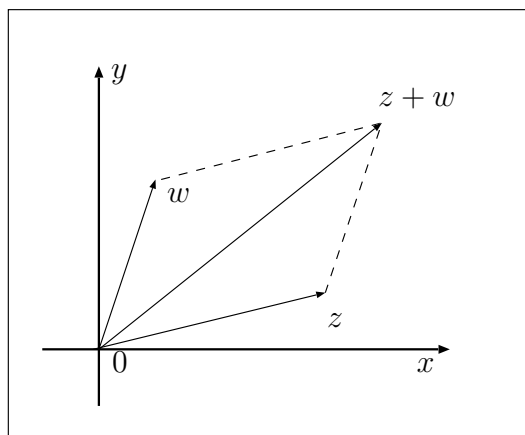


図 3: 複素数の和

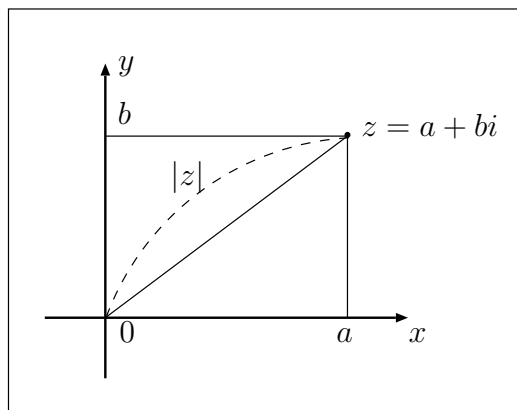


図 4: 絶対値

例:

$$\diamond \quad |-2 + 3i| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$$

$$\diamond \quad \left| \frac{1 + 3i}{2 - i} \right| = \frac{|1 + 3i|}{|2 - i|} = \frac{\sqrt{1 + 9}}{\sqrt{4 + 1}} = \sqrt{2}$$

問 9 次の値を求めなさい。

$$(1) |3 + 4i| \quad (2) |-1 + \sqrt{3}i| \quad (3) |\sqrt{5}i| \quad (4) \left| \frac{2}{1 + 2i} \right| \quad (5) \left| \frac{4 + i}{4 - i} \right|$$

$$(6) \left| \cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} \right|$$

問 10 $|z| = \sqrt{2}$ のとき、次の値を求めなさい。

$$(1) |z^2| \quad (2) |(2 + i)z| \quad (3) \left| \frac{1}{z} \right| \quad (4) z\bar{z}$$

4 極形式

- 複素数平面上で、 x 軸の正の向きから、原点から z への線分にはかった角 (反時計回り) $= z$ の **偏角** $= \arg(z)$ と書く (図 5)。
- 例えば $\arg(i) = \pi/2 + 2n\pi$ (n は整数) となり偏角は一つには決まらないが、 $(-\pi, \pi]$ の範囲の偏角を「偏角の主値」と呼び $\text{Arg}(z)$ と書くことがある (例えば $\text{Arg}(i) = \pi/2$)。
- $\arg(z) = \text{Arg}(z) + 2n\pi$
- 注意:

- 偏角の主値は $[0, 2\pi)$ 等の別の 2π 幅の範囲で考える流儀もある。

2. $\arg(z) = \arg(w)$ のような偏角に関する等式は、通常 $\text{Arg}(z) = \text{Arg}(w)$ のような意味、すなわち 2π の整数倍の差を除いて等しいことを意味する。
3. $z = 0$ の場合は偏角 $\arg(z)$ は定められない。

例:

$$\diamond \text{Arg}(1-i) = -\frac{\pi}{4}, \quad \arg(1-i) = -\frac{\pi}{4} + 2n\pi$$

$$\diamond \text{Arg}(3) = 0, \text{Arg}(-3) = \pi$$

注意: $\text{Arg}(-z) \neq -\text{Arg}(z)$

問 11 次の偏角を求めなさい。

- (1) $\text{Arg}(-3i)$ (2) $\text{Arg}(1+i)$ (3) $\text{Arg}(-\sqrt{3}-i)$ (4) $\text{Arg}(5)$ (5) $\text{Arg}(-10)$
 (6) $\text{Arg}\left(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3}\right)$

- $z = a+bi \neq 0$ のとき、 $r = |z|$, $\theta = \arg(z)$ (の一つ) とすると、 $a = \text{Re}(z) = r \cos \theta$, $b = \text{Im}(z) = r \sin \theta$ となり、 $z = r \cos \theta + (r \sin \theta)i = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ の形に書けるが、この最後の式を z の **極形式** と呼ぶ (図 6)。

• 注意

- $r = 1$ の場合は、カッコは不要。
- 極形式では、 r は必ず $r \geq 0$ の形にする。

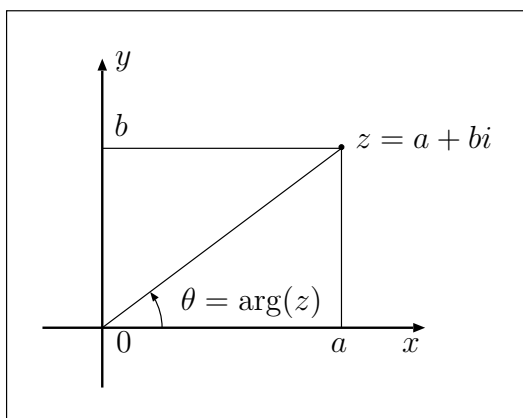


図 5: 偏角

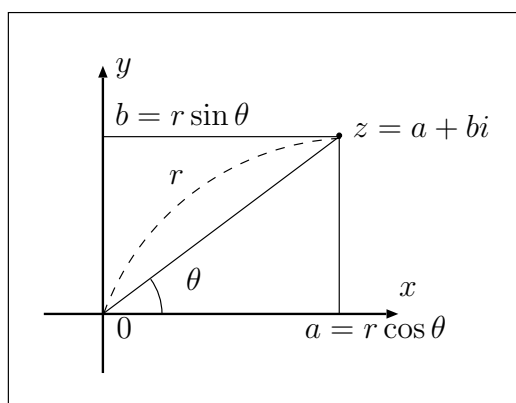


図 6: 極形式

例:

$$\diamond z = 1-i \text{ は、 } |z| = \sqrt{2}, \text{Arg}(z) = -\frac{\pi}{4} \text{ より、 } z = \sqrt{2} \left\{ \cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right\}$$

$$\left(= \sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right) \right)$$

問 12 次の複素数の絶対値と偏角を求め、極形式で表しなさい。

(1) $2 + 2i$ (2) $-3i$ (3) $-2\sqrt{3} + 2i$ (4) -3

● 偏角、極形式に関する性質 ($z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, $w = R(\cos \phi + i \sin \phi)$ とする)

1. $|\cos \theta + i \sin \theta| = 1$
2. $\overline{\cos \theta + i \sin \theta} = \cos \theta - i \sin \theta = \cos(-\theta) + i \sin(-\theta)$
3. $(\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \phi + i \sin \phi) = \cos(\theta + \phi) + i \sin(\theta + \phi)$
4. $\frac{\cos \theta + i \sin \theta}{\cos \phi + i \sin \phi} = \cos(\theta - \phi) + i \sin(\theta - \phi)$, 特に $\frac{1}{\cos \phi + i \sin \phi} = \cos \phi - i \sin \phi$
5. $\arg(\bar{z}) = -\arg(z)$, すなわち $\bar{z} = r\{\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)\}$
6. $\arg(zw) = \arg(z) + \arg(w)$, すなわち $zw = rR\{\cos(\theta + \phi) + i \sin(\theta + \phi)\}$
(複素数平面上では、 zw は、 z を原点の回りに (反時計回りに) ϕ だけ回転し、原点からの距離を R 倍したもの (図 7))
7. $\arg\left(\frac{z}{w}\right) = \arg(z) - \arg(w)$, すなわち $\frac{z}{w} = \frac{r}{R}\{\cos(\theta - \phi) + i \sin(\theta - \phi)\}$
(複素数平面上では、 z/w は、 z を $-\phi$ だけ回転し、原点からの距離を $1/R$ 倍したもの (図 7)), 特に
 $\arg\left(\frac{1}{w}\right) = -\arg(w)$, すなわち $\frac{1}{w} = \frac{1}{R}(\cos \phi - i \sin \phi)$

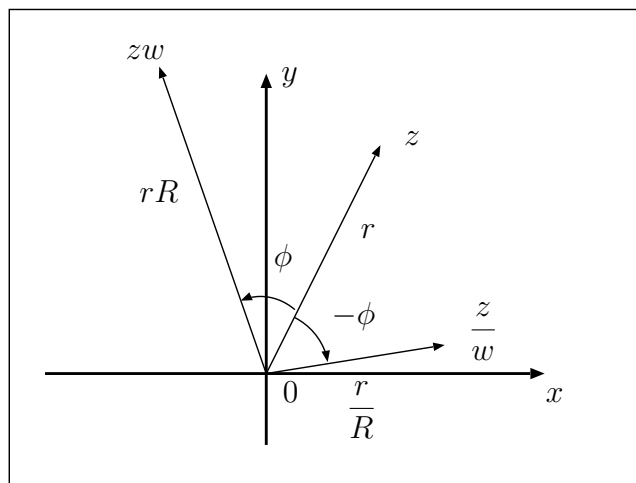


図 7: 積、商

例:

◇ $z = 3\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$, $w = 4\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)$ のとき、

$$\circ zw = 12 \left\{ \cos \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \right) \right\} = 12 \left(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right)$$

$$\circ \frac{z}{w} = \frac{3}{4} \left\{ \cos \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) \right\} = \frac{3}{4} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right)$$

◇ iz は、 z を反時計回りに $\frac{\pi}{2}$ 回転したもの。

問 13 $|z| = 3$, $\text{Arg}(z) = \pi/5$ のとき、次の複素数を極形式で表しなさい。

(1) $\bar{z}$ (2) iz (3) z^2 (4) $\frac{5}{z}$

問 14 $z = 5 - \sqrt{3}i$ を、反時計回りに $\frac{\pi}{3}$ 回転した複素数を $a + bi$ の形に表しなさい。

5 ド・モアブルの公式

- ド・モアブルの公式: $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$ (n : 整数)
- $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ のとき、 $z^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$
- $z^n = \alpha$ の解 (α の n 乗根) は、 $\alpha = R(\cos \phi + i \sin \phi)$, $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ とすれば、 $r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta) = R(\cos \phi + i \sin \phi)$ より、 $r^n = R$, $n\theta = \phi + 2k\pi$ となるので、

$$z = \sqrt[n]{R} \left\{ \cos \left(\frac{\phi}{n} + \frac{2k\phi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\phi}{n} + \frac{2k\phi}{n} \right) \right\} \quad (k = 0, 1, \dots, n-1)$$

例:

$$\begin{aligned} \diamond (-1 + \sqrt{3}i)^5 &= \left\{ 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) \right\}^5 = 2^5 \left(\cos \frac{10\pi}{3} + i \sin \frac{10\pi}{3} \right) \\ &= 32 \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = -16 - 16\sqrt{3}i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \diamond z^2 = i \text{ の解は、} z &= r(\cos \theta + i \sin \theta) \ (r > 0) \text{ とすると、} z^2 = r^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta), \\ i &= \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \text{ より、} r^2 = 1, 2\theta = \pi/2 + 2n\pi. \text{ よって } r = 1, \theta = \pi/4 + n\pi \\ \text{なので、} z &= \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}, \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \end{aligned}$$

問 15 次の値を求めなさい。

(1) $\left(\cos \frac{\pi}{15} + i \sin \frac{\pi}{15} \right)^{10}$ (2) $(1+i)^8$

問 16 $z^3 = 1$ となる z を極形式で表しなさい。

- ド・モアブルの公式を逆に見て、実部と虚部に分ければ、 $\cos, \sin$ の n 倍角の公式が得られる。

例:

$$\begin{aligned} \diamond \cos 3\theta &= \operatorname{Re}(\cos 3\theta + i \sin 3\theta) = \operatorname{Re}((\cos \theta + i \sin \theta)^3) = \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta \\ &= 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \quad (\cos \text{ の } 3 \text{ 倍角の公式}) \end{aligned}$$

問 17 $\sin 3\theta$ を $\sin \theta$ で表しなさい ($\sin$ の 3 倍角の公式)

6 オイラーの公式

- オイラーの公式: $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ (θ : 実数)
(極形式の「方向部分」が e の純虚数乗となる)
- 注意: 「オイラーの公式」は「公式」とついているが、実数乗ではない新たな指数なので、むしろ「定義」のようなもの。ただし、こう定義するのが自然である状況証拠はいくつかある。(テイラー展開、指数法則、微分の性質等。詳細は省略。)
- 新たな極形式: $z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta}$
- 性質:
 1. $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta$
 2. $|e^{i\theta}| = 1, \quad \arg(e^{i\theta}) = \theta + 2n\pi$
 3. $e^{i\theta}e^{i\phi} = e^{i(\theta+\phi)}, \quad e^{i\theta}/e^{i\phi} = e^{i(\theta-\phi)}$
 4. 整数 n に対して $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ (ド・モアブルの定理)
 5. $e^{2\pi i} = 1, \quad e^{i(\theta+2\pi)} = e^{i\theta}$

例:

$$\diamond e^{2\pi i/3} = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\diamond \text{逆に } -1 + \sqrt{3}i = 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) = 2e^{2\pi i/3}$$

問 18 次の値を、 $a + bi$ の形の複素数に直しなさい。

- (1) $e^{\pi i/3}$ (2) $e^{5\pi i/6}$ (3) $e^{-3\pi i/4}$ (4) $e^{\pi i}$ (5) $\overline{e^{\pi i/2}}$ (6) $e^{3\pi i/2}e^{-5\pi i/4}$
(7) $\frac{1}{e^{-7\pi i/6}}$

問 19 問 12 の極形式を、 $re^{i\theta}$ の形の極形式で表しなさい。

- e の複素数乗: $e^z = e^{x+yi} = e^x e^{yi} = e^x (\cos y + i \sin y)$
- 性質 ($z = x + yi$, $w = a + bi$: 複素数):
 1. $\overline{e^z} = e^{\bar{z}} = e^x e^{-iy}$
 2. $|e^z| = e^x = e^{\operatorname{Re}(z)}$, $\arg(e^z) = y + 2n\pi = \operatorname{Im}(z) + 2n\pi$
 3. $e^z e^w = e^{z+w}$, $e^z / e^w = e^{z-w}$
 4. $(e^z)^n = e^{nz} = e^{nx} e^{iny}$
 5. $\operatorname{Re}(e^z) = e^x \cos y$, $\operatorname{Im}(e^z) = e^x \sin y$
 6. $e^{z+2\pi i} = e^z$

例:

- ◇ $e^{1+2i} = e^1 e^{2i} = e(\cos 2 + i \sin 2)$
- ◇ $e^{1+2i} / e^{3-4i} = e^{(1+2i)-(3-4i)} = e^{-2+6i} = e^{-2}(\cos 6 + i \sin 6)$
- ◇ $\operatorname{Arg}(e^{1-4i}) = \operatorname{Arg}(e^{1+(2\pi-4)i}) = 2\pi - 4$ (-4 は $-4 < -\pi$ より主値の範囲に入らない)

問 20 次の値を求めなさい。

- (1) $|e^{3+2i}|$ (2) $\operatorname{Re}(e^{-4+3i})$ (3) $\operatorname{Im}(ie^{2+5i})$ (4) $\arg(e^{1-5i})$

問 21 $z^4 = 2$ となる z を、 $re^{i\theta}$ の形の極形式で表しなさい。

7 応用例

• 複素数値関数

- 独立変数 x は実数を動くが、値が複素数値の関数 $f(x)$ を複素数値関数と呼ぶ。
- $\operatorname{Re}(f(x)) = p(x)$, $\operatorname{Im}(f(x)) = q(x)$ とすると、 $f(x) = p(x) + iq(x)$
- $f(x)$ の微分、積分は、 $i = \sqrt{-1}$ は定数なので、以下のように考える。

$$f'(x) = p'(x) + iq'(x), \quad \int f(x)dx = \int p(x)dx + i \int q(x)dx,$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b p(x)dx + i \int_a^b q(x)dx$$

- $\operatorname{Re}(f(x))' = \operatorname{Re}(f'(x)), \operatorname{Im}(f(x))' = \operatorname{Im}(f'(x))$
- $\operatorname{Re}\left(\int f(x)dx\right) = \int \operatorname{Re}(f(x))dx, \operatorname{Im}\left(\int f(x)dx\right) = \int \operatorname{Im}(f(x))dx$

- 複素数の定数 α に対して、

$$(e^{\alpha x})' = \alpha e^{\alpha x}, \int e^{\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x} + C \quad (C = C_1 + iC_2)$$

$$\left((e^{(a+bi)x})' = (a+bi)e^{(a+bi)x}, \int e^{(a+bi)x} dx = \frac{1}{a+bi} e^{(a+bi)x} + C_1 + iC_2\right)$$

問 22 $e^{(3+2i)x} = e^{3x}(\cos 2x + i \sin 2x)$ を微分して、それが $(3+2i)e^{(3+2i)x} = (3+2i)e^{3x}(\cos 2x + i \sin 2x)$ に等しいかどうか確認しなさい。

- $e^{ax} \cos bx$ 不定積分は以下のように計算できる (上の積分の実部)。

$$\begin{aligned} \int e^{ax} \cos bx dx &= \int \operatorname{Re}(e^{ax} e^{ibx}) dx = \operatorname{Re}\left(\int e^{(a+bi)x} dx\right) \\ &= \operatorname{Re}\left(\frac{1}{a+bi} e^{(a+bi)x}\right) + C \end{aligned}$$

$e^{ax} \sin bx$ もこの積分の虚部を使えば計算できる (いずれも部分積分でも求められるが、部分積分が 2 回必要だったもの)。

- 指数法則 $e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha} e^{i\beta}$ の実部、虚部は、それぞれ $\cos, \sin$ の加法定理を思い出すのに利用できる。
- $(e^{ix})' = ie^{ix}$ の実部、虚部は、それぞれ $(\cos x)' = -\sin x, (\sin x)' = \cos x$ になっている。

例:

$$\begin{aligned} \diamond \int e^{2x} \cos 3x dx &= \operatorname{Re}\left(\int e^{(2+3i)x} dx\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{2+3i} e^{(2+3i)x} dx\right) + C \\ &= \frac{e^{2x}}{13} \operatorname{Re}((2-3i)(\cos 3x + i \sin 3x)dx) + C = \frac{e^{2x}}{13}(2 \cos 3x + 3 \sin 3x) + C \end{aligned}$$

問 23 $I = \int e^{-4x} \sin 3x dx$ を求めなさい。

- $\cos x, \sin x$ は指数を用いて $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ と表すことができる。
- $z(t) = Ae^{i\omega t}$ は、複素数平面乗では原点中心、半径 A の円周上を動き、 t が時間であればそれは等速円運動で、その速度 $v(t)$ は $v(t) = z'(t) = Ai\omega e^{i\omega t} = A\omega e^{i(\omega t + \pi/2)}$ 、角速度は ω となる。

例:

◇ n 倍角の公式の逆に、 $\cos^n x \sin^m x$ を $\cos kx, \sin \ell x$ で表すことができる (展開)。

$$\begin{aligned}\sin^3 x &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^3 = \frac{1}{8i^3} (e^{3ix} - 3e^{2ix}e^{-ix} + 3e^{ix}e^{-2ix} - e^{-3ix}) \\ &= -\frac{1}{4} \left(\frac{e^{3ix} - e^{-3ix}}{2i} \right) + \frac{3}{4} \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right) = -\frac{1}{4} \sin 3x + \frac{3}{4} \sin x\end{aligned}$$

問 24 次のものを $\cos kx, \sin \ell x$ の定数倍の和で表しなさい。

(1) $\cos^3 x$ (2) $\cos^2 x \sin^2 x$

参考文献

- [1] 俣野博、河野俊丈編、「数学 II」(高等学校教科書)、東京書籍 (2012)
- [2] 俣野博、河野俊丈編、「数学 III」(高等学校教科書)、東京書籍 (2014)
- [3] 碓野敏博、「理工系の基礎数学」、学術図書出版社 (2007)
- [4] 矢野健太郎、石原繁、「基礎解析学 改訂版」、裳華房 (1993)
- [5] 金原粲監修、「電気数学」、実教出版 (2008)

問の略解

1 節

問 1 (1) -1 (2) 3 (3) -3 (4) $3 - 5i$ (5) $x = \frac{5}{2}, y = \frac{3}{4}$

問 2 (1) $-5 + 18i$ (2) $18 + i$ (3) 25 (4) $-\frac{6}{25} + \frac{17}{25}i$ (5) $-\frac{4}{25} + \frac{3}{25}i$
(6) $3 - 2i$

問 3 (1) 略 ($\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w} = -1 + 2i$) (2) 略 ($\overline{zw} = \bar{z}\bar{w} = 29 - 31i$)

2 節

問 4 (1) $-\sqrt{2}i$ (2) -10 (3) $-\sqrt{3}i$

問 5 (1) $x = \pm\sqrt{5}i$ (2) $x = \pm\frac{5}{2}i$

問 6 (1) $x = 1 \pm 2i$ (2) $x = -\frac{1}{8} \pm \frac{\sqrt{47}}{8}i$

問 7 (1) $x = 2, x = -1 \pm \sqrt{3}i$ (2) $x = 1, -1, i, -i$

3 節

問 8 略 ((5) $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$, (6) $2 + 2\sqrt{3}i$, (7) $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$)

問 9 (1) 5 (2) 2 (3) $\sqrt{5}$ (4) $\frac{2}{\sqrt{5}}$ (5) 1 (6) 1

問 10 (1) 2 (2) $\sqrt{10}$ (3) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (4) 2

4 節

問 11 (1) $-\frac{\pi}{2}$ (2) $\frac{\pi}{4}$ (3) $-\frac{5\pi}{6}$ (4) 0 (5) π (6) $-\frac{\pi}{3}$

問 12 (1) $2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ (2) $3\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$
(3) $4\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$ (4) $3(\cos\pi + i\sin\pi)$

問 13 (1) $3\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{5}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{5}\right)\right\}$ (2) $3\left(\cos\frac{7\pi}{10} + i\sin\frac{7\pi}{10}\right)$
(3) $9\left(\cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}\right)$ (4) $\frac{5}{3}\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{5}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{5}\right)\right\}$

問 14 $(5 - \sqrt{3}i)\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 4 + 2\sqrt{3}i$

5 節

問 15 (1) $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ (2) 16

問 16 $z = \cos 0 + i \sin 0, \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}, \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}$

問 17 $\sin 3\theta = \operatorname{Im}(\cos 3\theta + i \sin 3\theta) = \operatorname{Im}((\cos \theta + i \sin \theta)^3) = 3 \cos^2 \theta \sin \theta - 3 \sin^3 \theta$
 $= 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta$

6 節

問 18 (1) $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ (2) $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ (3) $-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$ (4) -1 (5) $-i$
 (6) $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ (7) $-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

問 19 (1) $2\sqrt{2}e^{\pi i/4}$ (2) $3e^{3\pi i/2} (= 3e^{-\pi i/2})$ (3) $4e^{5\pi i/6}$ (4) $3e^{\pi i}$

問 20 (1) e^3 (2) $e^{-4} \cos 3$ (3) $e^2 \cos 5$ (4) $-5 + 2n\pi$

問 21 $\sqrt[4]{2}e^{0i}, \sqrt[4]{2}e^{\pi i/2}, \sqrt[4]{2}e^{\pi i}, \sqrt[4]{2}e^{3\pi i/2}$

7 節

問 22 $\{e^{3x}(\cos 2x + i \sin 2x)\}' = 3e^{3x}(\cos 2x + i \sin 2x) + 2e^{3x}(-\sin 2x + i \cos 2x)$
 $= (3 + 2i)e^{3x}(\cos 2x + i \sin 2x)$

問 23 $I = \frac{e^{-4x}}{25}(-3 \cos 3x - 4 \sin 3x) + C$

問 24 (1) $\frac{1}{4} \cos 3x + \frac{3}{4} \cos x$ (2) $-\frac{1}{8} \cos 4x + \frac{1}{8}$