2017 年前期

# ベクトル (基礎数理 I(a) 講義資料)

(http://takeno.iee.niit.ac.jp/%7Eshige/math/lecture/b1ensyu/hwsol/2017/vector1.pdf)

## 1 ベクトルの定義

- 「ベクトル」とは “大きさ” と “向き” を合わせ持つ量。
- ベクトルの場所は無視する。すなわち、平行移動して重なるベクトル (向きと大きさが同じもの) は等しいと考える (図 1)。
- ベクトルの記号:
  - 1 文字の名前で表す場合、$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \ldots$ (上に矢印), あるいは、$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \ldots$ (太字)。
  - $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ = 点 A から点 B へ向かうベクトル (図 2)

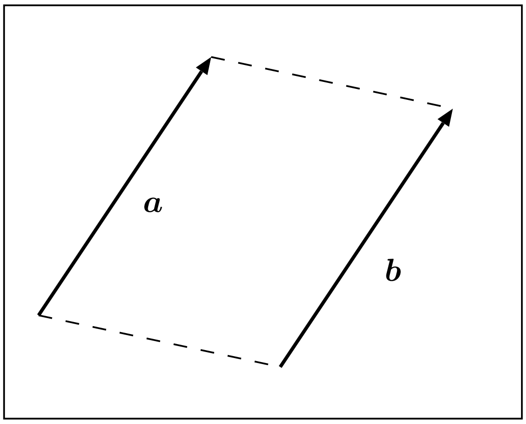



図 1: $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$

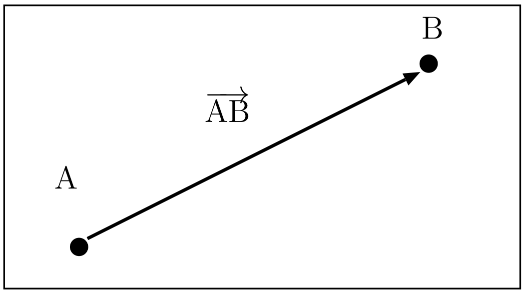



図 2: $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

**問 1** 　中心 O の正六角形 ABCDEF に対して、次のベクトルに等しいベクトル (O,A,B,C,D,E,F のいずれか 2 点からなるベクトル) をすべて上げよ。 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ 　(2) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

- $|\boldsymbol{a}|$ = ベクトルの大きさ (長さ)。
- 用語:
  - **単位ベクトル** = 大きさが 1 のベクトル

- **ゼロベクトル** = 大きさが 0 のベクトル、$\vec{0}$ や $\mathbf{0}$ で表す。
  $\overrightarrow{\mathrm{AA}}$ もゼロベクトル。
  注意: ゼロベクトルに “向き” はないが、便宜的にベクトルと見なす。
- 点 P の**位置ベクトル** = 原点 O から P へ向かうベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$
- **スカラー** = 実数。「ベクトル」の対義語 (向きのない量)。
  - $|\boldsymbol{a}|$、面積、体積、温度 = スカラー
  - $\boldsymbol{a}$、力、速度、加速度 = ベクトル
- **平面ベクトル** = 2 次元座標系 $(xy)$ 内でのベクトル (2 次元ベクトル)
- **空間ベクトル** = 3 次元座標系 $(xyz)$ 内でのベクトル (3 次元ベクトル)

**問 2** 中心 O、一辺の長さが 2 の正六角形 ABCDEF に対して、次の値を求めよ。 (1) $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$ (2) $|\overrightarrow{\mathrm{BD}}|$ (3) $|\overrightarrow{\mathrm{CF}}|$

## 2 ベクトルの和、差、スカラー倍

- ベクトルの和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ の定義 (2 通りある):

1. $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \boldsymbol{b}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ とするとき ($\boldsymbol{a}$ の終点と $\boldsymbol{b}$ の始点を合わせる)、$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とする (図 3)。
2. $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \boldsymbol{b}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とし ($\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の始点を合わせる)、ABDC が平行四辺形になるように D を取るとき、$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ とする (図 4)。

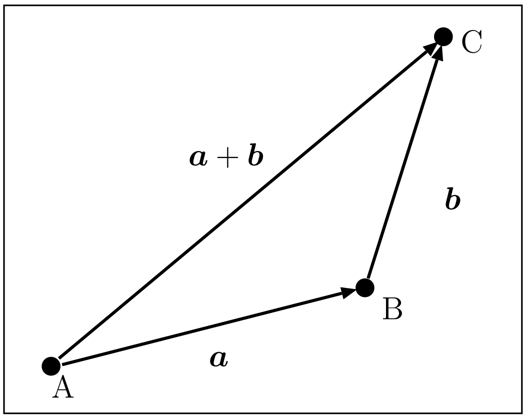



図 3: ベクトルの和 1.

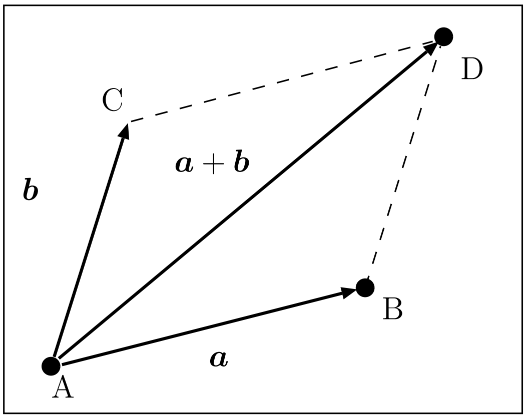



図 4: ベクトルの和 2.

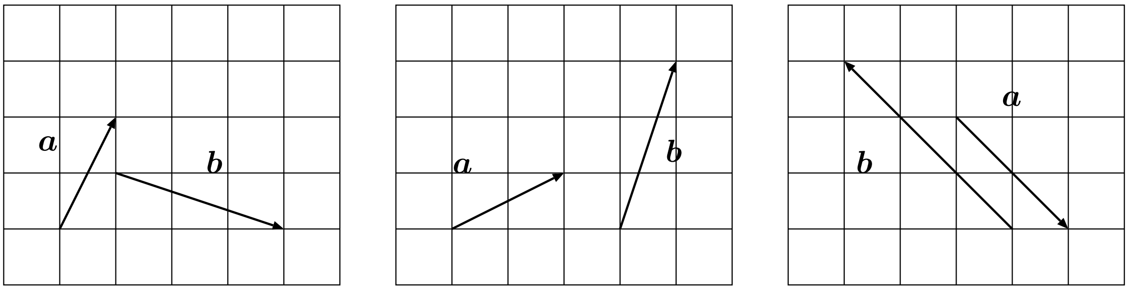
- ベクトルの和の性質

1. $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$
2. $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$

3. $\boldsymbol{a} + \mathbf{0} = \boldsymbol{a}$
4. $\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}) = \mathbf{0}$ ($-\boldsymbol{a}$ は $\boldsymbol{a}$ と同じ大きさで向きが逆のベクトル)
5. $\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}$

**問 3** 以下の図に対して、$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ を図で示せ。

(1) (2) (3)



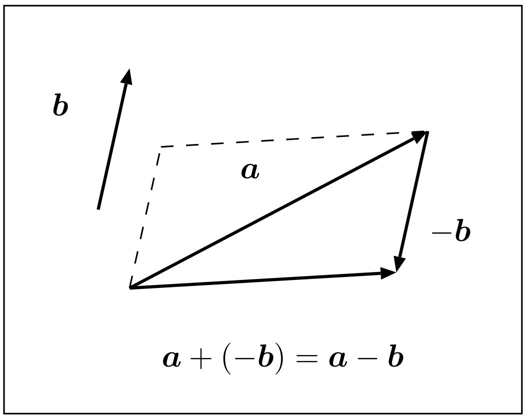

**問 4** $\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} + \overrightarrow{\mathrm{CA}} = \mathbf{0}$ となることを示せ。

**問 5** 上の和の性質 2. が成り立つことを図を用いて説明せよ。

- ベクトルの差の定義: $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{b})$ (図 5)、 $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{CB}} - \overrightarrow{\mathrm{CA}}$

**問 6** 問 3 の $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に対して、$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ を図で示せ。

- ベクトルのスカラー倍 $k\boldsymbol{a}$ の定義 ($k$ は実数): (図 6)
  - $k > 0$ のときは、$\boldsymbol{a}$ と向きが同じで、大きさが $|\boldsymbol{a}|$ の $k$ 倍のベクトル。
  - $k < 0$ のときは、$\boldsymbol{a}$ と向きが逆で、大きさが $|\boldsymbol{a}|$ の $|k|$ 倍のベクトル。
  - $k = 0$ のときは、$\mathbf{0}$。
- ベクトルのスカラー倍の性質
  1. $k(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = k\boldsymbol{a} + k\boldsymbol{b}$
  2. $(k + \ell)\boldsymbol{a} = k\boldsymbol{a} + \ell\boldsymbol{a}$
  3. $k(\ell\boldsymbol{a}) = (k\ell)\boldsymbol{a}$
  4. $1\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$, $(-1)\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{a}$



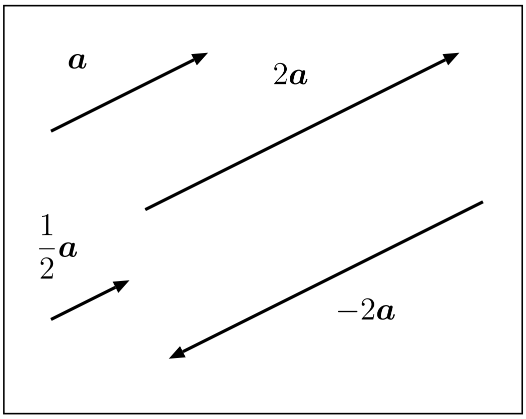




図 5: ベクトルの差

図 6: ベクトルのスカラー倍

**問 7**　次の式を展開せよ。 $3(\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}) - 4(\boldsymbol{b} - 3\boldsymbol{a})$

**問 8**　問 3 の $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に対して、$\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a} - \dfrac{1}{3}\boldsymbol{b}$ を図で示せ。

- スカラー倍の応用
  - $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ のとき、$\boldsymbol{a} \,/\!/\, \boldsymbol{b} \iff \boldsymbol{b} = k\boldsymbol{a}$ となる $k$ があること
  - $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ のとき、$\boldsymbol{a}$ と同じ方向の単位ベクトル $\boldsymbol{b}$ は、$\boldsymbol{b} = \dfrac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$、
    $\boldsymbol{a}$ と平行な単位ベクトル $\boldsymbol{c}$ は、$\boldsymbol{c} = \pm\dfrac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$
  - 平行でない 2 つの平面ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ を使えば、その平面のベクトルはすべて $s\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b}$ の形に表される ($s, t$ はスカラー)。
  - 1 つの平面上にない 3 つの空間ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ を使えば、空間ベクトルはすべて $s\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b} + u\boldsymbol{c}$ の形に表される ($s, t, u$ はスカラー)。

**問 9**　中心 O の正六角形 ABCDEF に対して、$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \boldsymbol{b} = \overrightarrow{\mathrm{AF}}$ とするとき、次のベクトルを $s\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b}$ ($s, t$ はスカラー) の形に表せ。
(1) $\overrightarrow{\mathrm{AO}}$　(2) $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$　(3) $\overrightarrow{\mathrm{BD}}$

# 3 ベクトルの成分

- ベクトルの成分: ベクトルを数値で表現する仕組み。
- 用語:
  - **基本ベクトル** = 軸方向の単位ベクトル (大きさが 1) (図 7, 8)
    2 次元の基本ベクトルは 2 つ: $\boldsymbol{e_1}$ ($x$ 軸方向), $\boldsymbol{e_2}$ ($y$ 軸方向)
    3 次元の基本ベクトルは 3 つ: $\boldsymbol{e_1}$ ($x$ 軸方向), $\boldsymbol{e_2}$ ($y$ 軸方向), $\boldsymbol{e_3}$ ($z$ 軸方向)
    注意: 3 次元基本ベクトルは、物理や工学では $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ と書くことも多い。

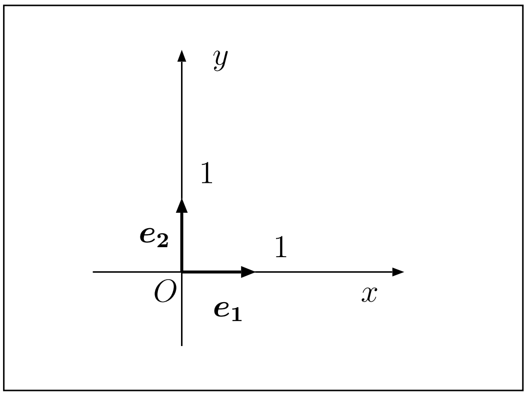



図 7: 基本ベクトル (平面ベクトル)

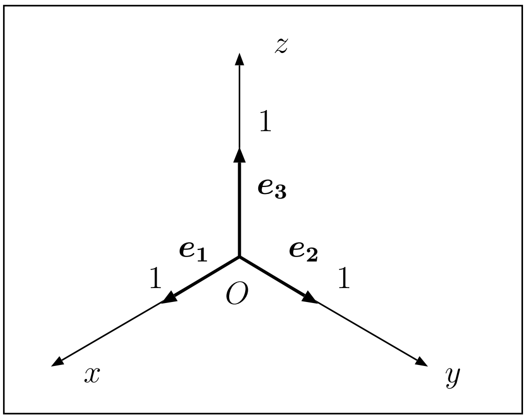



図 8: 基本ベクトル (空間ベクトル)

- 定義: ベクトル $\boldsymbol{a}$ の**成分**=「$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ となる点 A の座標」(図 9)

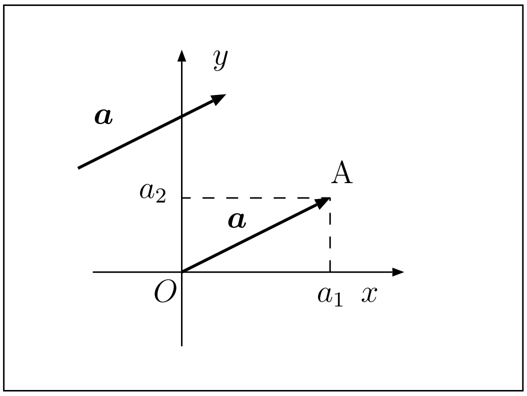



図 9: ベクトルと成分

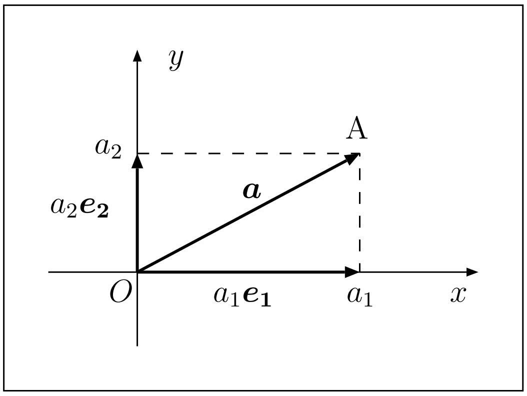



図 10: 基本ベクトル表現

- 書き方:
  - 平面ベクトル: $\mathrm{A}(a_1, a_2)$ のとき、$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)$ と書く。
  - 空間ベクトル: $\mathrm{A}(a_1, a_2, a_3)$ のとき、$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$ と書く。
  - 注意: $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ のように縦に書く本もある。
- $a_1$ を $x$ 成分、$a_2$ を $y$ 成分 (3 次元の場合 $a_3$ を $z$ 成分) と呼ぶ。
- 基本ベクトルの成分
  - 平面ベクトル: $\boldsymbol{e_1} = (1, 0)$, $\boldsymbol{e_2} = (0, 1)$
  - 空間ベクトル: $\boldsymbol{e_1} = (1, 0, 0)$, $\boldsymbol{e_2} = (0, 1, 0)$, $\boldsymbol{e_3} = (0, 0, 1)$

**問 10** 次の成分を持つベクトルを $xy$ 平面上に図示せよ。

$$(1)\ \boldsymbol{a} = (1, -3) \quad (2)\ \boldsymbol{b} = \left(0, -\frac{3}{2}\right) \quad (3)\ \boldsymbol{c} = (4-6, 3+2)$$

**問 11** 問 3 の格子の一マスが 1×1 のサイズであるとき、$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ をそれぞれ成分で表せ。

- 成分表現と基本ベクトル表現 (図 10)
  - 平面ベクトル: $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2) \iff \boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{e_1} + a_2\boldsymbol{e_2}$
  - 空間ベクトル: $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3) \iff \boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{e_1} + a_2\boldsymbol{e_2} + a_3\boldsymbol{e_3}$
- 成分による計算
  - 平面ベクトルの場合 ($\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)$, $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2)$)
    - $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \iff a_1 = b_1$ かつ $a_2 = b_2$
    - $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$
    - $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0} \iff a_1 = a_2 = 0$
    - $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$, $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2)$
    - $c\boldsymbol{a} = (ca_1, ca_2)$
    - $\mathrm{A}(a_1, a_2)$, $\mathrm{B}(b_1, b_2)$ のとき、$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$
  - 空間ベクトルの場合 ($\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$)
    - $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \iff a_1 = b_1$ かつ $a_2 = b_2$ かつ $a_3 = b_3$
    - $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$
    - $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0} \iff a_1 = a_2 = a_3 = 0$
    - $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$, $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)$
    - $c\boldsymbol{a} = (ca_1, ca_2, ca_3)$
    - $\mathrm{A}(a_1, a_2, a_3)$, $\mathrm{B}(b_1, b_2, b_3)$ のとき、$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$

**問 12** 2 点 $\mathrm{A}(-1, 3)$, $\mathrm{B}(2, 5)$ に対して、次のものを求めよ (スカラーか成分で表す)。 (1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ (2) $3\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ (3) $|-5\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$

**問 13** ベクトル $\boldsymbol{a} = (3, 1, -2)$, $\boldsymbol{b} = (0, -3, 5)$ に対して、次のものを求めよ。 (1) $4\boldsymbol{b} - 2\boldsymbol{a}$ (2) $3(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) - (2\boldsymbol{b} - 4\boldsymbol{a})$ (3) $|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}|$

**問 14** ベクトル $\boldsymbol{a} = (2, -1)$, $\boldsymbol{b} = (1, 3)$ に対して、次のベクトルを $s\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b}$ ($s$, $t$ はスカラー) の形に表せ。 (1) $\boldsymbol{c} = (3, 2)$ (2) $\boldsymbol{d} = (4, 0)$

**問 15** $\mathrm{A}(4, 3, -2)$, $\mathrm{B}(-5, 2, 3)$, $\mathrm{C}(1, -1, 0)$ で $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{CD}}$ のとき、点 D の座標を求めよ。

**問 16** $\boldsymbol{a} = (4, 3)$, $\boldsymbol{b} = (-6, x)$ のとき、 (1) $\boldsymbol{a} \mathbin{/\!/} \boldsymbol{b}$ となるような $x$ の値を求めよ。 (2) $\boldsymbol{a}$ と同じ向きの単位ベクトル $\boldsymbol{c}$ を求めよ。

# 4 ベクトルの内積

- 内積の定義: $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ のとき、
  $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の**内積** (または **スカラー積**) $= |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$ (スカラー値)
  ($\theta$ は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角、$0 \leq \theta \leq \pi$)
  ただし、$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ または $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ のときは ($\theta$ が決まらないが)、$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$ とする。

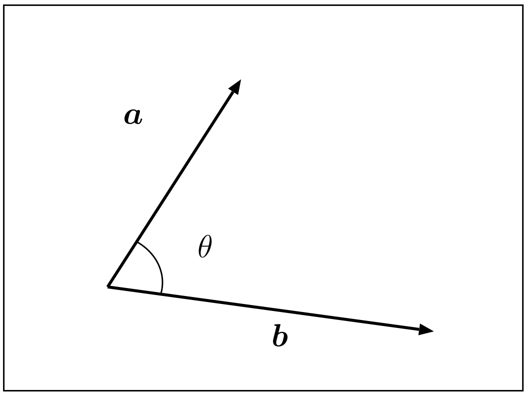



図 11: ベクトルの内積

- $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ を、$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ や $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$ と書く流儀もある。

**問 17** 中心 O、一辺の長さが 2 の正六角形 ABCDEF に対して、次の値を求めよ。 (1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AD}}$ (2) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AF}}$ (3) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}}$

- 内積の成分計算式:
  - 平面ベクトル: $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2), \boldsymbol{b} = (b_1, b_2)$ のとき、$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$
  - 空間ベクトル: $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3), \boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$ のとき、
    $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$
- 内積の性質
  1. $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|^2$
  2. $\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$
  3. $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}, \quad (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}$
  4. $(k\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b} = k(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}), \quad \boldsymbol{a} \cdot (k\boldsymbol{b}) = k(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})$
  5. $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ のとき、$\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b} \iff \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$

**問 18** $\boldsymbol{a} = (3, -2, 5), \boldsymbol{b} = (1, 4, -2)$ に対して、次の値を求めよ。
(1) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ (2) $\boldsymbol{b} \cdot (-3\boldsymbol{b})$ (3) $(\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})$

- 内積の応用
  - なす角: $\cos\theta = \dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|} = \dfrac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$
  - 正射影: $\boldsymbol{a}$ の $\boldsymbol{b}$ 方向への正射影 $\ell$ は、$\ell = \dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$
  - 内積の符号:
    $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} > 0 \iff$ なす角が鋭角、 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} < 0 \iff$ なす角が鈍角
  - 展開: $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2 = (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{a}|^2 + 2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} + |\boldsymbol{b}|^2$ 等
  - 基本ベクトルの内積: $\boldsymbol{e_i}\cdot\boldsymbol{e_j} = 0$ ($i \neq j$ のとき)、$\boldsymbol{e_i}\cdot\boldsymbol{e_j} = 1$ ($i = j$ のとき)
  - ある物を力 $\boldsymbol{F}$ で P から Q まで移動したときの仕事量 $W$ は、$W = \boldsymbol{F}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$

**問 19** $\boldsymbol{a} = (1,3,-1)$, $\boldsymbol{b} = (2,4,-1)$ に対して、それらのなす角 $\theta$ の $\cos\theta$ の値を求めよ。

**問 20** $\boldsymbol{a} = (3,-2,5)$, $\boldsymbol{b} = (2,4,-2)$, $\boldsymbol{c} = (2,y,z)$ が、$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{c}$ かつ $\boldsymbol{b}\perp\boldsymbol{c}$ であるとき、$\boldsymbol{c}$ を求めよ。

**問 21** $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{5}$, $|\boldsymbol{b}| = 3\sqrt{2}$, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = -3$ のとき、$|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|$ の値を求めよ。
(ヒント: $|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|^2 = (\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})$ を展開)

**問 22** 東西方向に伸びるレールの上に乗っている重りを、力 5.0 [N] で北東方向に引いて、レール上を東 15 [m] 移動した。このとき重りにした仕事量 $W$ を求めよ。

# 5 平面の方程式

- 3 次元空間内の平面 $\alpha$ は、それに垂直な方向 (ベクトル $\boldsymbol{n} = (a,b,c)$) と、平面上にある点 $\mathrm{A}(x_0,y_0,z_0)$ (いずれかひとつ) で決定する。

  点 $\mathrm{P}(x,y,z)$ が平面 $\alpha$ 上にある $\iff \overrightarrow{\mathrm{AP}} \perp \boldsymbol{n} \iff \overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\boldsymbol{n} = 0$

  よって、平面 $\alpha$ の方程式は $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0) = 0$

- 一般に、$x$, $y$, $z$ の一次式 $ax+by+cz+d = 0$ は、ベクトル $\boldsymbol{n} = (a,b,c)$ に垂直な平面を表す。

- 点と平面の距離: 平面 $ax+by+cz+d = 0$ と点 $\mathrm{B}(p,q,r)$ との距離 $L$ は、$L = \dfrac{|ap+bq+cr+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

**問 23** $\boldsymbol{a} = (3, 1, -2)$ に垂直で、点 B$(1, 0, 4)$ を通る平面の方程式を求めよ。

**問 24** A$(1, 1, 6)$, B$(0, 1, 3)$, C$(1, 3, 2)$ を通る平面の方程式を求めよ。

**問 25** 問 23 の平面と原点との距離を求めよ。

# 6 ベクトルの外積

- 外積は 3 次元空間ベクトルのみを考えるが、その座標軸は「右手系」であるとする。

  **右手系** $=$ $x$ 軸、$y$ 軸、$z$ 軸の向きが、右手の親指、人差し指、中指で無理なく表せるもの
  $=$ $x$ 軸の方向から $y$ 軸の方向に右ねじを回すと、そのねじの進む方向が $z$ 軸の方向と同じになるもの (図 12, 13)

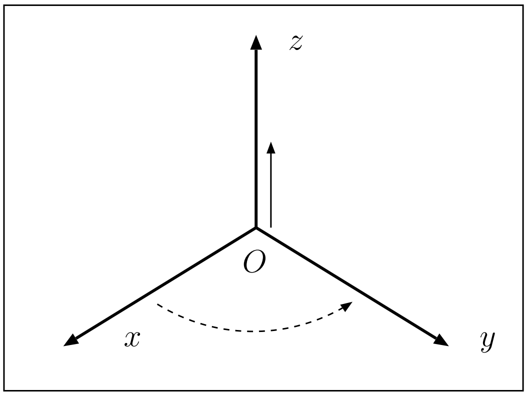



図 12: 右手系

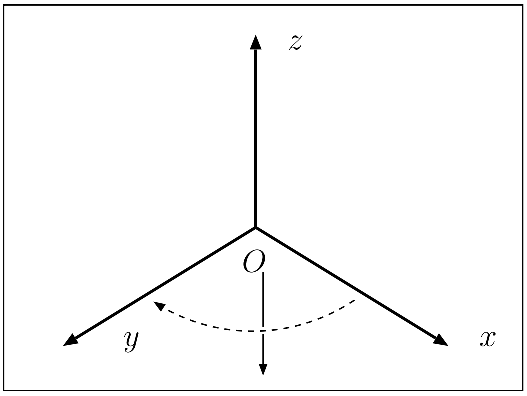



図 13: 左手系

- 外積の定義: $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ で、$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が平行でないとき、
  $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の**外積** (または **ベクトル積**) は、次のような「ベクトル」とする。

  1. $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ の大きさ ($|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|$) $=$ $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が作る平行四辺形の面積 $S$
  2. $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ の方向$=$ $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の両方に垂直
  3. $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ の向き$=$ $\boldsymbol{a}$ から $\boldsymbol{b}$ へ右ねじを回して進む向き ($\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ が右手系)

  ただし、$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{a} \,/\!/\, \boldsymbol{b}$ のいずれかであるときは、($\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の両方に垂直な方向が決まらないが)、$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ とする。

- <u>注意</u>: 実数 (スカラー) では $a \cdot b$ と $a \times b$ はどちらも単なる積 ($ab$) と同じ意味だが、ベクトルでは、$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ (内積) と $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ (外積) は意味が異なる。正しく書き分けること。

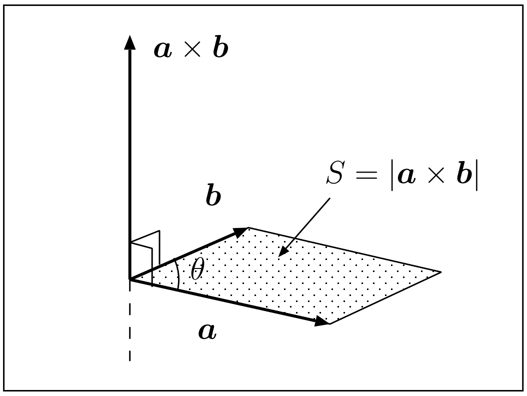



図 14: ベクトルの外積

- 基本ベクトルの外積:
  $\boldsymbol{e_1}\times\boldsymbol{e_2}=\boldsymbol{e_3}$, $\boldsymbol{e_2}\times\boldsymbol{e_3}=\boldsymbol{e_1}$, $\boldsymbol{e_3}\times\boldsymbol{e_1}=\boldsymbol{e_2}$,
  $\boldsymbol{e_2}\times\boldsymbol{e_1}=-\boldsymbol{e_3}$, $\boldsymbol{e_3}\times\boldsymbol{e_2}=-\boldsymbol{e_1}$, $\boldsymbol{e_1}\times\boldsymbol{e_3}=-\boldsymbol{e_2}$

**問 26** 外積の定義より、次の外積を求めよ。 (1) $2\boldsymbol{e_1}\times\boldsymbol{e_2}$ (2) $(\boldsymbol{e_1}+\boldsymbol{e_2})\times\boldsymbol{e_1}$

- 外積の成分計算式: $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$ のとき、
  $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b_1-a_1b_3,\ a_1b_2-a_2b_1)$
  以下の図 15, 16 のように計算するとよい (図 16 は $\boldsymbol{a}=(3,4,5)$, $\boldsymbol{b}=(2,-1,3)$ の場合に $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(17,1,-11)$ となる例)。

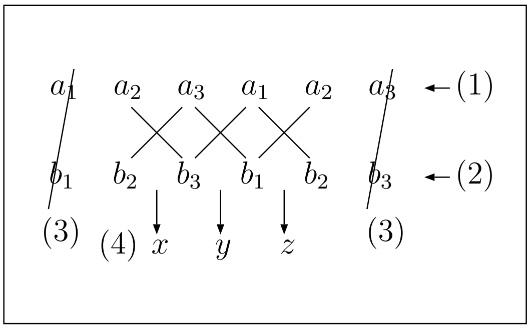



図 15: 外積の成分計算

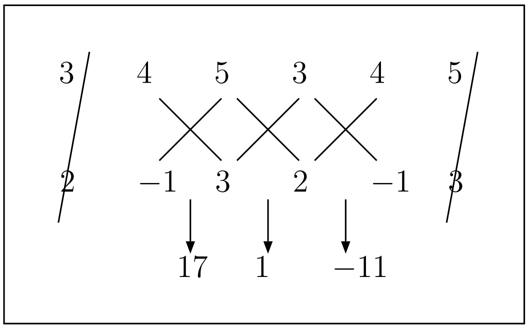



図 16: 成分計算の例

(1) $\boldsymbol{a}$ の成分を 2 回書き並べ、
(2) $\boldsymbol{b}$ の成分をその下に 2 回書き並べ、
(3) 両端を削り、
(4) 斜めにかけて引き算をすればそれが外積の各成分。
(5) その結果を $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ と内積して 0 となることを確認。
($\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ に垂直) (図 16 の例の場合、$51+4-55=0$, $34-1-33=0$)

**問 27** 次の外積を求めよ。
(1) $(3,2,-1)\times(-2,1,5)$ (2) $(5,0,-2)\times(3,-1,0)$ (3) $(1,-1,2)\times(3,-3,6)$

- 外積の性質:

1. $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$
2. $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$
3. $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c},\quad (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$
4. $(k\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=k(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}),\quad \boldsymbol{a}\times(k\boldsymbol{b})=k(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$
5. $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ のとき、$\boldsymbol{a}\,/\!/\,\boldsymbol{b} \iff \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$

- 注意: 外積は結合法則は成り立たない。すなわち、$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$ と $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ は等しくない。

  例: $(\boldsymbol{e_1}\times\boldsymbol{e_2})\times\boldsymbol{e_2}=-\boldsymbol{e_1},\quad \boldsymbol{e_1}\times(\boldsymbol{e_2}\times\boldsymbol{e_2})=\boldsymbol{0}$

- 外積の応用

  - 展開:
    $(p\boldsymbol{a}+q\boldsymbol{b})\times(r\boldsymbol{a}+s\boldsymbol{b})=pr(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a})+ps(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})+qr(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})+qs(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b})$
    $=(ps-qr)(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$
  - 大きさ: $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$
  - $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が作る三角形の面積$=\dfrac{1}{2}|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$
  - $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ の三重積$=(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が作る平行六面体の体積$)\times(\pm1)$
  - 磁束密度 $\boldsymbol{B}$ の磁界の中で流れる電流 $I$ の流れる方向が $\boldsymbol{n}$ (=単位ベクトル) であるとき、その長さ $\ell$ の導線には力 $\boldsymbol{F}=((I\boldsymbol{n})\times\boldsymbol{B})\ell$ が働く (フレミングの法則)

**問 28** $\boldsymbol{a}=(-4,1,2)$, $\boldsymbol{b}=(1,0,-3)$ に対し、次のものを求めよ。
(1) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が作る平行四辺形の面積 $S$ (2) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ に垂直な単位ベクトル $\boldsymbol{n}$

**問 29** $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(3,1,-4)$ のとき、次のものを求めよ。
(1) $(2\boldsymbol{a})\times(3\boldsymbol{b})$ (2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$ (3) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$ と $(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$ が作る三角形の面積

**問 30** $\boldsymbol{a}=(1,-1,3)$, $\boldsymbol{b}=(2,3,5)$, $\boldsymbol{c}=(-1,1,0)$ に対し、
(1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ を求めよ。 (2) $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$ を求めよ。 (3) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ と $(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}$ が等しいことを示せ。

**問 31** 　問 20 を、$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ を計算することで解け (ヒント: $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ は平行)。

- 内積と外積の比較

| 項目 | 内積 | 外積 |
|---|---|---|
| 記号 | $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ | $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ |
| 値 | スカラー値 | ベクトル値 |
| 交換法則 | $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}$ | $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$ |
| 分配法則 | 成立 | 成立 |
| 同じものの積 | $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = \lvert\boldsymbol{a}\rvert^2$ | $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ |
| ゼロになるとき | $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0 \iff \boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$ | $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0} \iff \boldsymbol{a} \,/\!/\, \boldsymbol{b}$ |
| 次元 | 2 次元、3 次元 | 3 次元のみ |

**問 32** 　$\boldsymbol{a} = (1, 3, -4)$, $\boldsymbol{b} = (2, -1, 5)$, $\boldsymbol{c} = (1, 1, -1)$ に対して、次の記述、計算式の誤りを指摘せよ。

(1) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = 2 - 3 - 20 = -21$, 　$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = (2, -3, -20)$

(2) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ が作る平行四辺形の面積 $S_1$ は、
$S_1 = (11, -13, -7) = \sqrt{11^2 + 13^2 + 7^2} = \sqrt{339}$

(3) $(3\boldsymbol{c}) \times (2\boldsymbol{a}) = 6(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}) = (6, -18, -12)$

(4) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{c}$ が作る平行四辺形の面積 $S_2$ は、$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{26}$, $|\boldsymbol{c}| = \sqrt{3}$ より
$S_2 = |\boldsymbol{a}| \times |\boldsymbol{c}| = \sqrt{78}$

# 問の略解

**問 1** (1) $\overrightarrow{\mathrm{EF}}$, $\overrightarrow{\mathrm{DO}}$, $\overrightarrow{\mathrm{CB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ ($\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ 自身も $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ に等しい)
(2) $\overrightarrow{\mathrm{FO}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{ED}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ ($\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ 自身も $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ に等しい)

**問 2** (1) 2, (2) $2\sqrt{3}$, (3) 4

**問 3** (1) 図は略 (右に 4、上に 1 上がったベクトル),
(2) 図は略 (右に 3、上に 4 上がったベクトル),
(3) 図は略 (左に 1、上に 1 上がったベクトル)

**問 4** 左辺 $= (\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}}) + \overrightarrow{\mathrm{CA}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{CA}} = \overrightarrow{\mathrm{AA}} = \mathbf{0}$

**問 5** 略

**問 6** (1) 図は略 (左に 2、上に 3 上がったベクトル),
(2) 図は略 (右に 1、下に 2 下がったベクトル),
(3) 図は略 (右に 5、下に 5 下がったベクトル)

**問 7** $15\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}$

**問 8** (1) 図は略 (左に 1/2、上に 4/3 上がったベクトル),
(2) 図は略 (右に 2/3、下に 1/2 下がったベクトル),
(3) 図は略 (右に 2、下に 2 下がったベクトル)

**問 9** (1) $\overrightarrow{\mathrm{AO}} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$, (2) $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = 2\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$, (3) $\overrightarrow{\mathrm{BD}} = \boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}$

**問 10** 略

**問 11** (1) $\boldsymbol{a} = (1, 2)$, $\boldsymbol{b} = (3, -1)$, (2) $\boldsymbol{a} = (2, 1)$, $\boldsymbol{b} = (1, 3)$,
(3) $\boldsymbol{a} = (2, -2)$, $\boldsymbol{b} = (-3, 3)$

**問 12** (1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (3, 2)$, (2) $3\overrightarrow{\mathrm{BA}} = (-9, -6)$, (3) $|-5\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = 5\sqrt{13}$

**問 13** (1) 与式 $= (-6, -14, 24)$, (2) 与式 $= 7\boldsymbol{a} - 5\boldsymbol{b} = (21, 22, -39)$,
(3) 与式 $= 2\sqrt{15}$

**問 14** (1) $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$, (2) $\boldsymbol{d} = \dfrac{12}{7}\boldsymbol{a} + \dfrac{4}{7}\boldsymbol{b}$

**問 15** $\mathrm{D}(-8, -2, 5)$

**問 16** (1) $x = -9/2$, (2) $\boldsymbol{c} = \left(\dfrac{4}{5}, \dfrac{3}{5}\right)$

**問 17** (1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AD}} = 4$, (2) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AF}} = -2$, (2) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = 6$

**問 18** (1) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = -15$, (2) $\boldsymbol{b} \cdot (-3\boldsymbol{b}) = -63$, (3) 与式 $= -19$

**問 19** $\cos\theta = \dfrac{14}{\sqrt{231}}$

**問 20** $\boldsymbol{c} = (2, -2, -2)$

**問 21** $|\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b}| = \sqrt{89}$

**問 22** $W = \dfrac{75}{2}\sqrt{2}[\mathrm{Nm}] = 53\ [\mathrm{Nm}]$

**問 23** $3x + y - 2z + 5 = 0$

**問 24** $3x - 2y - z + 5 = 0$

**問 25** $\dfrac{5}{\sqrt{14}}$

**問 26** (1) $2\boldsymbol{e_3}$, (2) $-\boldsymbol{e_3}$

**問 27** (1) $(11, -13, 7)$, (2) $(-2, -6, -5)$, (3) $(0, 0, 0)$

**問 28** (1) $S=\sqrt{110}$, (2) $\boldsymbol{n}=\left(\pm\frac{3}{\sqrt{110}},\pm\frac{10}{\sqrt{110}},\pm\frac{1}{\sqrt{110}}\right)$

**問 29** (1) $(18,6,-24)$, (2) $(-9,-3,12)$, (3) $\frac{3}{2}\sqrt{26}$

**問 30** (1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(-14,1,5)$, (2) $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=(-5,-5,5)$, (3) 略 (15)

**問 31** 略

**問 32** (1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ の右辺は $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ の計算になっている、$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ の右辺はベクトルではなく $2-3-20$。
(2) $S_1=(11,-13,-7)$ が間違い、正しくは $S_1=|(11,-13,-7)|$。
(3) 正しくは、$(3\boldsymbol{c})\times(2\boldsymbol{a})=6(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})=(-6,18,12)$。
(4) $S_2=|\boldsymbol{a}|\times|\boldsymbol{c}|$ となるのは、平行四辺形が長方形のときだけ。これは長方形ではないので、$S_2=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}|=|(1,-3,-2)|=\sqrt{14}$。