⑨ 部分分数分解の原理（通分の逆）

- 整式 $A(x)$ と $B(x)$ が互いに素とは，1次以上の共通因数を持たないこと（$3x$ と $6(x+1)$ は互いに素，x^2-1 と $2x+2$ は互いに素ではない）
  （$x+1$ が…共通）
- $\deg A(x)$ = 整式 $A(x)$ の次数　（$\deg(x^2+2x)=2$）

定理1　整式 $A(x)$, $B(x)$ が（分母の因数分解）

- $B(x) = B_1(x)\,B_2(x)$ で $B_1(x)$, $B_2(x)$ は互いに素
- $\deg A < \deg B$

であるならば（部分分数分解）

- $\dfrac{A(x)}{B(x)} = \dfrac{A(x)}{B_1(x)B_2(x)} = \dfrac{A_1(x)}{B_1(x)} + \dfrac{A_2(x)}{B_2(x)}$
- $\deg A_1 < \deg B_1$ かつ $\deg A_2 < \deg B_2$

となる整式 $A_1(x)$, $A_2(x)$ が（ただ1組）存在する

系2　整式 $A(x)$, $B(x)$ が

- $B(x) = B_1(x)\times B_2(x)\times\cdots\times B_n(x)$ で，$B_1(x)\sim B_n(x)$ はどの2つも互いに素
- $\deg A < \deg B$

であるならば

- $\dfrac{A(x)}{B(x)} = \dfrac{A(x)}{B_1(x)\cdot\cdots\cdot B_n(x)} = \dfrac{A_1(x)}{B_1(x)} + \cdots + \dfrac{A_n(x)}{B_n(x)}$
- $\deg A_j < \deg B_j$ $(j=1,2,\cdots,n)$

となる整式 $A_1(x),\cdots,A_n(x)$ が（ただ1組）存在する

例1

$$\frac{1}{(s^2+1)(s-3)} = \frac{As+B}{s^2+1} + \frac{C}{s-3}$$

（1次）（0次）（2次）（1次）（互いに素）

（未定係数）（A, B, C は定数）とおくと

（定理1によりこう分けになる）

$$右辺 = \frac{(As+B)(s-3)+C(s^2+1)}{(s^2+1)(s-3)}$$ より $1 = (As+B)(s-3)+C(s^2+1)$

（sで整理）

$= (A+C)s^2 + (-3A+B)s + (-3B+C)$ より各次数の係数を比較して

$$\begin{cases} A+C=0 & (2次) \\ -3A+B=0 & (1次) \\ -3B+C=1 & (0次) \end{cases}$$

よって　$A=-\frac{1}{10},\ B=-\frac{3}{10},\ C=\frac{1}{10}$

（部分分数分解）

$$\therefore \frac{1}{(s^2+1)(s-3)} = \frac{-\frac{1}{10}s-\frac{3}{10}}{s^2+1} + \frac{\frac{1}{10}}{s-3} = -\frac{1}{10}\frac{s}{s^2+1} - \frac{3}{10}\frac{1}{s^2+1} + \frac{1}{10}\frac{1}{s-3}$$

$\mathcal{L}[\cos t]$　$\mathcal{L}[\sin t]$　$\mathcal{L}[e^{3t}]$

$$= \mathcal{L}\left[-\frac{1}{10}\cos t - \frac{3}{10}\sin t + \frac{1}{10}e^{3t}\right]$$

$$\therefore \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+1)(s-3)}\right](t) = -\frac{1}{10}\cos t - \frac{3}{10}\sin t + \frac{1}{10}e^{3t}$$

---

⑩ 種々のラプラス逆変換

- $F(s) = \dfrac{2s-3}{s^2+5} = 2\cdot\dfrac{s}{s^2+5} - \dfrac{3}{\sqrt{5}}\cdot\dfrac{\sqrt{5}}{s^2+5} = \mathcal{L}\left[2\cos\sqrt{5}t - \frac{3}{\sqrt{5}}\sin\sqrt{5}t\right](s)$

（これが $\frac{2s-3}{s^2+5}$ のラプラス逆変換）

- $F(s) = \dfrac{s}{(s+3)^2}$　$s+3=S$ とおくと（平行移動）　$s=S-3$ より

$$F(s) = \frac{S-3}{S^2} = \frac{1}{S} - \frac{3}{S^2} = \mathcal{L}[1](S) - 3\mathcal{L}[t](S)$$

（共通）

$$= \mathcal{L}[1-3t](s+3) \underset{(P217(2))}{=} \mathcal{L}\left[e^{-3t}(1-3t)\right](s)$$

- $F(s) = \dfrac{s-2}{s^2+2s+3}$ ← 分母は因数分解できないので平方完成（判別式<0）

$F(s) = \dfrac{s-2}{(s+1)^2+2}$ より　$s+1=S$ とすると $s=S-1$ より

$$F(s) = \frac{S-3}{S^2+2} = \frac{S}{S^2+2} - \frac{3}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{S^2+2} = \mathcal{L}\left[\cos\sqrt{2}t - \frac{3}{\sqrt{2}}\sin\sqrt{2}t\right](S)$$

$$= \mathcal{L}\left[\cos\sqrt{2}t - \frac{3}{\sqrt{2}}\sin\sqrt{2}t\right](s+1) \underset{(P217(2))}{=} \mathcal{L}\left[e^{-t}\left(\cos\sqrt{2}t - \frac{3}{\sqrt{2}}\sin\sqrt{2}t\right)\right](s)$$

（$\dfrac{s}{(s^2+a^2)^n}$, $\dfrac{a}{(s^2+a^2)^n}$ は難（$t^k\cos at$, $t^k\sin at$ の知識），詳しくは講義のWebページ）