2008 年 03 月 18 日

$t\sin t$ のラプラス変換

新潟工科大学 情報電子工学科 竹野茂治

1 はじめに

応用数理 A の講義の後半に解説したラプラス変換

$$\mathcal{L}[f(t)](s) = \int_0^\infty e^{-ts} f(t)ds \tag{1}$$

は積分による変換なので、不定積分の計算と同様、和や定数倍は難しくはないが、積、商、合成関数のラプラス変換は難しい。よって、積のラプラス変換は、積でない形に変換できるならまずはそうするのが原則であり、例えば三角関数同士の積の場合は、倍角の公式や積和の公式を用いて積でない形に変形してから求める。

しかし $t\sin t$ のような場合は、積でない形に直すことはできないので、このような場合は多項式倍や指数関数倍の場合だけに使える公式を用いて計算する。

そのような計算は教科書にも書いてあるが、今年は講義では触れることができなかったし、計算方法も何通りかあるので、本稿ではその $t\sin t$ のラプラス変換を求めるいくつかの方法を紹介し、さらに $t\cos t$ やより一般の $t^k\sin t$, $t^k\cos t$ のラプラス変換についても考察してみることにする。

なお、以下に述べる計算には厳密的な説明が欠けている、あるいは成立するための詳しい条件の説明を省略した、いわゆる「形式的」なものも多い。それらの正当性を厳密に議論することはここでは行わず、あくまでそのような計算によって結果を求める、ということを目的とする。

2 多項式倍の公式を用いる方法

多項式倍のラプラス変換については、次のような公式がある。

$$\mathcal{L}[tf(t)](s) = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}[f(t)](s) \tag{2}$$

この公式は、形式的に以下のようにして導かれる。

$$
\begin{aligned}
-\frac{d}{ds}\mathcal{L}[f(t)](s) &= -\frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt = -\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s}\left\{e^{-st}f(t)\right\}dt \\
&= -\int_0^\infty \left\{-te^{-st}f(t)\right\}dt = \int_0^\infty e^{-st}tf(t)dt = \mathcal{L}[tf(t)](s)
\end{aligned}
$$

なお、上の変形の途中で微分と積分の順序交換の定理:

$$
\frac{d}{dy}\int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx
$$

を用いた。

(2) を繰り返せば一般に、

$$
\mathcal{L}[t^k f(t)](s) = (-1)^k \frac{d^k}{ds^k}\mathcal{L}[f(t)](s) \tag{3}
$$

も得られる。これにより、多項式倍のラプラス変換は、ラプラス変換の微分で求まることになる。これを用いれば、

$$
\mathcal{L}[t\sin t] = -\left(\mathcal{L}[\sin t]\right)' = -\left(\frac{1}{s^2+1}\right)' = \frac{2s}{(s^2+1)^2} \tag{4}
$$

と求まる。

3 指数関数倍の公式を用いる方法

ラプラス変換は、指数関数倍に対しては、次のような公式がある。

$$
\mathcal{L}[e^{at}f(t)](s) = \mathcal{L}[f(t)](s-a) \tag{5}
$$

これも、形式的に次のようにして得られる。

$$
\mathcal{L}[e^{at}f(t)](s) = \int_0^\infty e^{-st}e^{at}f(t)dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}f(t)dt = \mathcal{L}[f(t)](s-a)
$$

$t\sin t$ を t の $\sin t$ 倍と見て、$\sin t$ をオイラーの公式により複素指数を使って書き直せばこの公式が使える。オイラーの公式より、

$$e^{it} = \cos t + i\sin t, \quad e^{-it} = \cos t - i\sin t$$

なので、

$$\cos t = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2}, \quad \sin t = \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i} \tag{6}$$

となる。よって、

$$t\sin t = t\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i} = \frac{1}{2i}te^{it} - \frac{1}{2i}te^{-it}$$

なので、(5) より

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[t\sin t] &= \frac{1}{2i}\mathcal{L}[te^{it}] - \frac{1}{2i}\mathcal{L}[te^{-it}] = \frac{1}{2i}\mathcal{L}[t](s-i) - \frac{1}{2i}\mathcal{L}[t](s+i) \\ &= \frac{1}{2i}\left\{\mathcal{L}[t](s-i) - \mathcal{L}[t](s+i)\right\} \end{aligned}$$

となるが、$\mathcal{L}[t](s) = 1/s^2$ なので、よって

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[t\sin t] &= \frac{1}{2i}\left\{\frac{1}{(s-i)^2} - \frac{1}{(s+i)^2}\right\} = \frac{(s+i)^2-(s-i)^2}{2i(s-i)^2(s+i)^2} \\ &= \frac{(s^2+2si+i^2)-(s^2-2si+i^2)}{2i(s^2-i^2)^2} = \frac{4si}{2i(s^2+1)^2} = \frac{2s}{(s^2+1)^2} \end{aligned}$$

となる。

なお、この複素指数を利用する方法には、(6) を利用する以外に、複素指数倍のラプラス変換の実数部分と虚数部分を考える、という方法もある。オイラーの公式により、

$$\mathcal{L}[te^{it}] = \mathcal{L}[t\cos t + it\sin t] = \mathcal{L}[t\cos t] + i\mathcal{L}[t\sin t]$$

なので、$\mathcal{L}[te^{it}]$ の虚数部分が $\mathcal{L}[t\sin t]$ であり、

$$\mathcal{L}[te^{it}](s) = \mathcal{L}[t](s-i) = \frac{1}{(s-i)^2}$$

となるから、$1/(s-i)^2$ を実数部分と虚数部分に分けると、

$$\frac{1}{(s-i)^2}=\frac{(s+i)^2}{\{(s-i)(s+i)\}^2}=\frac{s^2+2si+i^2}{(s^2-i^2)^2}=\frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}+i\frac{2s}{(s^2+1)^2}$$

となるので、よって

$$\mathcal{L}[t\cos t]=\frac{s^2-1}{(s^2+1)^2},\quad \mathcal{L}[t\sin t]=\frac{2s}{(s^2+1)^2}$$

となる、という方法である。こちらの方が、e^{-it} を使わない分多少楽であるし、ついでに $t\cos t$ のラプラス変換も得られる、というメリットがある。

4 テイラー展開の利用

ラプラス変換の計算で常に使えるわけではないが、テイラー展開 (マクローリン展開) を形式的に利用した計算法も紹介する。

$\sin t$ のマクローリン展開は、

$$\sin t=\frac{t}{1!}-\frac{t^3}{3!}+\frac{t^5}{5!}-\frac{t^7}{7!}+\cdots$$

であり、これはすべての実数 t で成り立つ。よって、

$$t\sin t=\frac{t^2}{1!}-\frac{t^4}{3!}+\frac{t^6}{5!}-\frac{t^8}{7!}+\cdots \tag{7}$$

となる。$\mathcal{L}[t^k]=k!/s^{k+1}$ であるので、形式的に (7) をラプラス変換すると、

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[t\sin t] &= \frac{1}{1!}\frac{2!}{s^3}-\frac{1}{3!}\frac{4!}{s^5}+\frac{1}{5!}\frac{6!}{s^7}-\frac{1}{7!}\frac{8!}{s^9}+\cdots=\frac{2}{s^3}-\frac{4}{s^5}+\frac{6}{s^7}-\frac{8}{s^9}+\cdots\\ &= \frac{1}{s^2}\left(\frac{2}{s}-\frac{4}{s^3}+\frac{6}{s^5}-\frac{8}{s^7}+\cdots\right)\end{aligned}$$

となる。よって今、

$$h(X)=2X-4X^3+6X^5-8X^7+\cdots \tag{8}$$

とすれば、

$$\mathcal{L}[t\sin t] = \frac{1}{s^2}h\left(\frac{1}{s}\right)$$

と書けることになる。ところで、(8) は

$$H(X) = -1 + X^2 - X^4 + X^6 - X^8 + \cdots \tag{9}$$

を微分したものであり、(9) は初項 (-1)、公比 $(-X^2)$ の等比級数なので、

$$H(X) = \frac{-1}{1+X^2}$$

となる。よって、

$$h(X) = H'(X) = \left(\frac{-1}{1+X^2}\right)' = \frac{2X}{(1+X^2)^2}$$

より、

$$\mathcal{L}[t\sin t] \quad = \quad \frac{1}{s^2}\frac{\dfrac{2}{s}}{\left(1+\dfrac{1}{s^2}\right)^2} = \frac{1}{s^2}\frac{2s^3}{(s^2+1)^2} = \frac{2s}{(s^2+1)^2}$$

となる。

5 微分のラプラス変換を用いる方法

これも常にうまくいくわけではないが、微分のラプラス変換の公式

$$\mathcal{L}[f'] = s\mathcal{L}[f] - f(0), \quad \mathcal{L}[f''] = s^2\mathcal{L}[f] - sf(0) - f'(0) \tag{10}$$

を用いる方法もある。この公式も、形式的に部分積分を用いて得られる。

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f'] &= \int_0^\infty e^{-st}f'(t)dt = \left[e^{-st}f(t)\right]_{t=0}^{t=\infty} - \int_0^\infty (e^{-st})_t f(t)dt \\ &= 0 - f(0) - \int_0^\infty (-s)e^{-st}f(t)dt = s\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt - f(0) \\ &= s\mathcal{L}[f] - f(0)\end{aligned}$$

なお、$\lim_{t\to\infty} e^{-st}f(t) = 0$ としたが、これはラプラス変換が可能な関数、可能な範囲では自然な仮定である。

f'' に対しては、この公式を 2 度用いれば、

$$\mathcal{L}[f''] = s\mathcal{L}[f'] - f'(0) = s\left(s\mathcal{L}[f] - f(0)\right) - f'(0) = s^2\mathcal{L}[f] - sf(0) - f'(0)$$

として得られる。

今、$f(t) = t\sin t$ とすると、

$$f' = (t)'\sin t + t(\sin t)' = \sin t + t\cos t$$

なので、

$$f'' = (\sin t)' + (t)'\cos t + t(\cos t)' = 2\cos t - t\sin t = 2\cos t - f$$

となる。これをラプラス変換すると、

$$\mathcal{L}[f''] = \mathcal{L}[2\cos t] - \mathcal{L}[f]$$

となるが、上の計算より $f(0) = f'(0) = 0$ であり、よってこの左辺は $\mathcal{L}[f''] = s^2\mathcal{L}[f]$ となるので、

$$(s^2+1)\mathcal{L}[f] = \mathcal{L}[2\cos t]$$

となる。よって、

$$\mathcal{L}[f] = \frac{1}{s^2+1}\mathcal{L}[2\cos t] = \frac{1}{s^2+1}\,\frac{2s}{s^2+1} = \frac{2s}{(s^2+1)^2}$$

となる。

6 t^k 倍の場合

$t^k \sin t$ $(k \geq 1)$ のラプラス変換も、今まで紹介した手法で計算できる。しかし、$k=1$ のときはそれほど大変な計算ではなかったが、少し大きな k、例えば $k=5$ などのような場合には、方法によっては計算量が大変になるものもある。実際にどのようになるか見てみることにする。

以後、

$$F_k(s) = \mathcal{L}[t^k \sin t](s), \quad G_k(s) = \mathcal{L}[t^k \cos t](s)$$

と書くことにする。

まず、2 節の多項式倍の方法で考えると、

$$F_k = (-1)^k \frac{d^k}{ds^k}\mathcal{L}[\sin t] = (-1)^k \frac{d^k}{ds^k}\frac{1}{s^2+1}$$

となるが、これは k が大きいと計算が大変である。

$$\begin{aligned}
F_1 &= -\left(\frac{1}{s^2+1}\right)' = \frac{2s}{(s^2+1)^2}, \\
F_2 &= (-1)^2\left(\frac{1}{s^2+1}\right)'' = -(F_1)' = -\{2s(s^2+1)^{-2}\}'' \\
&= -2(s^2+1)^{-2} - 2s(-2)(s^2+1)^{-3}(2s) = -2(s^2+1)^{-2} + 8s^2(s^2+1)^{-3} \\
&= -\frac{2}{(s^2+1)^2} + \frac{8(s^2+1)-8}{(s^2+1)^3} = \frac{6}{(s^2+1)^2} - \frac{8}{(s^2+1)^3}
\end{aligned}$$

のようになる。以下、$Y = s^2+1$ と書き、s に関する微分を $Y_s = 2s$ のように書くことにすると、

$$\begin{aligned}
F_3 &= -(F_2)_s = -(6Y^{-2} - 8Y^{-3})_s \\
&= (12Y^{-3} - 24Y^{-4})Y_s = 24s(Y^{-3} - 2Y^{-4}), \\
F_4 &= -(F_3)_s = -\{24s(Y^{-3} - 2Y^{-4})\}_s \\
&= -24(Y^{-3} - 2Y^{-4}) - 24s(-3Y^{-4} + 8Y^{-5})(2s) \\
&= 24(-Y^{-3} + 2Y^{-4} + 6s^2Y^{-4} - 16s^2Y^{-5}) \\
&= 24\{-Y^{-3} + 2Y^{-4} + 6(Y-1)Y^{-4} - 16(Y-1)Y^{-5}\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 24(5Y^{-3} - 20Y^{-4} + 16Y^{-5}),\\
F_5 &= -(F_4)_s = -24(5Y^{-3} - 20Y^{-4} + 16Y^{-5})_s\\
&= -24(-15Y^{-4} + 80Y^{-5} - 80Y^{-6})(2s)\\
&= 240s(3Y^{-4} - 16Y^{-5} + 16Y^{-6})\\
&= 240s\left\{\frac{3}{(s^2+1)^4} - \frac{16}{(s^2+1)^5} + \frac{16}{(s^2+1)^6}\right\}
\end{aligned}
$$

のように計算される。多少は整理されるものの、計算はかなり大変であることがわかる。

7 t^k の指数関数倍の計算

次に、3 節の指数関数倍の公式を用いる方法で考えてみる。ここでは、その節の後半で述べたように、三角関数を複素指数で表わすのではなく、複素指数の実数部分と虚数部分で考えてみる。

$$
\mathcal{L}[t^k e^{it}] = \mathcal{L}[t^k \cos t] + i\mathcal{L}[t^k \sin t] = G_k + iF_k
$$

であり、

$$
\mathcal{L}[t^k e^{it}](s) = \mathcal{L}[t^k](s-i) = \frac{k!}{(s-i)^{k+1}}
$$

なので、z の実数部分を $\Re z$、z の虚数部分を $\Im z$ と書くことにすれば、

$$
\begin{aligned}
F_k &= \Im\frac{k!}{(s-i)^{k+1}} = \Im\frac{k!(s+i)^{k+1}}{\{(s-i)(s+i)\}^{k+1}} = \frac{k!\Im(s+i)^{k+1}}{(s^2+1)^{k+1}},\\
G_k &= \Re\frac{k!}{(s-i)^{k+1}} = \frac{k!\Re(s+i)^{k+1}}{(s^2+1)^{k+1}}
\end{aligned}
$$

となる。これなら、二項展開のみで計算が済み、しかも微分の場合のように $k = 1, 2, \ldots$ のように順番に計算しなくても直接求める k の場合の結果を計算することができる。例えば F_5 であれば、

$$
(s+i)^6 = s^6 + 6s^5 i - 15s^4 - 20s^3 i + 15s^2 + 6si - 1
$$

より $\Im(s+i)^6 = 6s^5 - 20s^3 + 6s$ となるので、

$$F_5 = \frac{5!}{(s^2+1)^6}(6s^5 - 20s^3 + 6s) = \frac{240s(3s^4 - 10s^2 + 3)}{(s^2+1)^6}$$

のようになる。

8 t^k 倍のテイラー展開

テイラー展開を利用する方法は、残念ながらあまりうまくはない。例えば $t^5 \sin t$ の場合、

$$t^5 \sin t = \frac{t^6}{1!} - \frac{t^8}{3!} + \frac{t^{10}}{5!} - \frac{t^{12}}{7!} + \cdots$$

より、

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}[t^5 \sin t] \\
&= \mathcal{L}\left[\frac{t^6}{1!} - \frac{t^8}{3!} + \frac{t^{10}}{5!} - \frac{t^{12}}{7!} + \cdots\right] = \frac{1}{1!}\frac{6!}{s^7} - \frac{1}{3!}\frac{8!}{s^9} + \frac{1}{5!}\frac{10!}{s^{11}} - \frac{1}{7!}\frac{12!}{s^{13}} + \cdots \\
&= \frac{1}{s^6}\left(\frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{s} - \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{s^3} + \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{s^5} - \cdots\right)
\end{aligned}$$

となり、この最後の式のかっこ内は、

$$\frac{-1}{1+X^2} = -1 + X^2 - X^4 + X^6 - X^8 + \cdots$$

を 5 回微分したもの

$$-\left(\frac{1}{1+X^2}\right)^{(5)} = 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2X - 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4X^3 + \cdots$$

を使って表わされる。しかし、左辺の 5 回の微分の計算は、結局 6 節の t^5 倍と見た場合の計算と同じことをやらなければならないので、ここから先の計算量はほぼその節の計算と同等である。

9 微分のラプラス変換による漸化式

5 節で、微分のラプラス変換の公式を利用した計算を紹介したが、それと同様にして F_k, G_k の漸化式を導く、という方法もある。それをここで紹介しよう。

$k\geq 1$ に対して

$$(t^k\sin t)'=kt^{k-1}\sin t+t^k\cos t$$

であるので、これをラプラス変換すると

$$\mathcal{L}[(t^k\sin t)']=k\mathcal{L}[t^{k-1}\sin t]+\mathcal{L}[t^k\cos t]$$

となる。この左辺は、(10) により、

$$\mathcal{L}[(t^k\sin t)']=s\mathcal{L}[t^k\sin t]-0=sF_k$$

となるので、よって

$$sF_k=kF_{k-1}+G_k\quad (k\geq 1) \tag{11}$$

が成り立つ。同様に、

$$(t^k\cos t)'=kt^{k-1}\cos t-t^k\sin t$$

より、

$$sG_k=kG_{k-1}-F_k\quad (k\geq 1) \tag{12}$$

が成り立つので、(11), (12) より

$$\begin{bmatrix} s & -1 \\ 1 & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} F_k \\ G_k \end{bmatrix}=k\begin{bmatrix} F_{k-1} \\ G_{k-1} \end{bmatrix}$$

となり、よって

$$\begin{bmatrix} F_k \\ G_k \end{bmatrix} = \frac{k}{s^2+1}\begin{bmatrix} s & 1 \\ -1 & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} F_{k-1} \\ G_{k-1} \end{bmatrix}$$

が得られる。今、$U_k = {}^t(F_k, G_k)$ とし、右辺の行列を A とするとこの行列は k にはよらず、

$$U_k = \frac{k}{s^2+1}AU_{k-1} \tag{13}$$

となるので、

$$U_k = \frac{k}{s^2+1}AU_{k-1} = \frac{k(k-1)}{(s^2+1)^2}A^2U_{k-2} = \cdots = \frac{k!}{(s^2+1)^k}A^kU_0$$

となる。ここで、U_0 は

$$U_0 = \frac{1}{s^2+1}\begin{bmatrix} 1 \\ s \end{bmatrix}$$

なので、よって

$$\begin{bmatrix} F_k \\ G_k \end{bmatrix} = \frac{k!}{(s^2+1)^{k+1}}\begin{bmatrix} s & 1 \\ -1 & s \end{bmatrix}^k\begin{bmatrix} 1 \\ s \end{bmatrix} \tag{14}$$

となり、この行列のベキを計算すれば F_k, G_k が求まることになる。ただし、これもやはり順番に計算しないといけないので、それほど楽ではない。

また、この (13), (14) より、

$$\hat{U}_k = \begin{bmatrix} \hat{F}_k \\ \hat{G}_k \end{bmatrix} = \frac{(s^2+1)^{k+1}}{k!}U_k$$

とすれば、係数に k の含まれない漸化式

$$\hat{U}_k = A\hat{U}_{k-1} \quad (k \geq 1)$$

が得られる。ここで、いわゆるケーリー・ハミルントンの関係式より

$$A^2 = (a+d)A - (ad-bc)E = 2sA - (s^2+1)E$$

が成り立つので、$k \geq 2$ に対し、

$$\hat{U}_k = A^2\hat{U}_{k-2} = 2sA\hat{U}_{k-2} - (s^2+1)E\hat{U}_{k-2} = 2s\hat{U}_{k-1} - (s^2+1)\hat{U}_{k-2}$$

が得られる。この最後の式は、行列計算を必要としない 3 項漸化式となっていて、

$$\hat{F}_k = 2s\hat{F}_{k-1} - (s^2+1)\hat{F}_{k-2}, \quad \hat{G}_k = 2s\hat{G}_{k-1} - (s^2+1)\hat{G}_{k-2} \tag{15}$$

を意味する。この式と初期値

$$(\hat{F}_0, \hat{G}_0) = (1, s), \quad (\hat{F}_1, \hat{G}_1) = (2s, s^2-1) \tag{16}$$

から順に $\hat{F}_k, \hat{G}_k$ を求めることができる。例えば F_5 を計算してみると、

$$\begin{aligned}
\hat{F}_2 &= 2s\hat{F}_1 - (s^2+1)\hat{F}_0 = 4s^2 - (s^2+1) = 3s^2-1, \\
\hat{F}_3 &= 2s\hat{F}_2 - (s^2+1)\hat{F}_1 = 2s(3s^2-1) - 2s(s^2+1) = 2s(2s^2-2), \\
\hat{F}_4 &= 2s\hat{F}_3 - (s^2+1)\hat{F}_2 = 8s^2(s^2-1) - (s^2+1)(3s^2-1) = 5s^4 - 10s^2 + 1, \\
\hat{F}_5 &= 2s\hat{F}_4 - (s^2+1)\hat{F}_3 = 2s(5s^4-10s^2+1) - 4s(s^2+1)(s^2-1) \\
&= 2s(3s^4 - 10s^2 + 3)
\end{aligned}$$

となるので、よって、

$$F_5 = \frac{5!}{(s^2+1)^6}\hat{F}_5 = \frac{240s(3s^4-10s^2+3)}{(s^2+1)^6}$$

となることになる。ただし、(14) の行列計算と比べて、それほど簡単であるともいい難い。

10　その他の性質について

その他、今までの考察でわかる F_k, G_k に関する性質を簡単に述べておく。

7 節、9 節の議論により、F_k, G_k の分子に表われる多項式 $\hat{F}_k, \hat{G}_k$ は

$$\hat{F}_k = \Im(s+i)^{k+1}, \quad \hat{G}_k = \Re(s+i)^{k+1} \tag{17}$$

であることがわかる。これは、3 項漸化式 (15) の、初期値 (16) を満たす一般項でもある。

(17) から、$\hat{F}_k, \hat{G}_k$ は一つおきの次数の項しか持たず、よって必ず奇関数か偶関数のどちらかになることもすぐにわかる。特に、次のことが言える:

- 奇関数 $t^{2m}\sin t,\ t^{2m-1}\cos t$ のラプラス変換は偶関数
- 偶関数 $t^{2m-1}\sin t,\ t^{2m}\cos t$ のラプラス変換は奇関数

なお、ここで s, t に関する「奇関数」「偶関数」という言葉を用いているが、厳密に言えば、t の関数は $t > 0$ でしか定義されておらず、またそのラプラス変換も s の関数としては $s > 0$ でしか意味を持たないので、$s = 0$ での対称性を意味する「偶関数」「奇関数」という言葉は適切ではないが、ここではそれらの式を「自然に実数全体に拡張したものを考えれば」という意味で用いることにする。

また、F_k, G_k の分子は (17) の定数倍であるから

- $F_k = (s$ の k 次式$)/(s^2+1)^{k+1}$
- $G_k = (s$ の $(k+1)$ 次式$)/(s^2+1)^{k+1}$

もわかる。

そして、例えば F_5 は、

$$\begin{aligned}
F_5 &= \frac{240s(3s^4 - 10s^2 + 3)}{(s^2+1)^6} = \frac{240s(3(Y-1)^2 - 10(Y-1) + 3)}{Y^6} \\
&= 240s(3Y^{-4} - 16Y^{-5} + 16Y^{-6}) \\
&= 240s\left\{\frac{3}{(s^2+1)^4} - \frac{16}{(s^2+1)^5} + \frac{16}{(s^2+1)^6}\right\}
\end{aligned}$$

のように変形できる。このようにして、結局以下のような形に変形できることがわかる:

$$
\begin{aligned}
F_{2m-1} &= s\,\frac{Y\text{ の }(m-1)\text{ 次式}}{Y^{2m}} &&= s\left(\frac{a_1}{Y^{m+1}}+\cdots+\frac{a_m}{Y^{2m}}\right),\\
F_{2m} &= \frac{Y\text{ の }m\text{ 次式}}{Y^{2m+1}} &&= \frac{b_1}{Y^{m+1}}+\cdots+\frac{b_{m+1}}{Y^{2m+1}},\\
G_{2m-1} &= \frac{Y\text{ の }m\text{ 次式}}{Y^{2m}} &&= \frac{c_1}{Y^{m}}+\cdots+\frac{c_{m+1}}{Y^{2m}},\\
G_{2m} &= s\,\frac{Y\text{ の }m\text{ 次式}}{Y^{2m+1}} &&= s\left(\frac{d_1}{Y^{m+1}}+\cdots+\frac{d_{m+1}}{Y^{2m+1}}\right)
\end{aligned}
$$

実際にこの係数を求めるのは容易ではないが、これらをこの形に変形すること自体は意味があり、有理関数のラプラス逆変換の計算に利用できる。それについては、また別の機会にまとめる予定である。

11 最後に

今年 (2007 年度) の応用数理 A の講義では、前半の方に時間を取られてしまい、後半のラプラス変換はほとんど進まなかった。よって、$t\sin t$ のラプラス変換もほとんど話ができなかったので、簡単にまとめようと本稿を書き始めたのであるが、いくつか個人的におもしろい性質も知ることができたし、色んな計算の手法も盛り込むことができたので、それなりに講義の補足にはなるのではないかと思う。

なお、私個人はラプラス変換にはそれほど詳しくはないので、よりシンプルな、うまい計算方法などがあるかもしれない。それらについては、工学部向けのラプラス変換の演習書などを参照するといいだろう。