

2024 年 12 月 06 日

# 単振り子と楕円関数

新潟工科大学 基礎教育・教養系 竹野茂治

## 1 はじめに

単振り子の運動が楕円関数で表現できる、という事実は、書籍にもネット上の情報にもたくさん取り上げられているので (例えば [1],[2],[3],[4],[5] など)、今さら改めて説明することはないが、今回別な目的で単振り子に関する話を書き出したところ、やはり本来の単振り子の解も一度ちゃんと紹介する必要があると感じ、そこで備忘録代わりにまとめておくことにする。

なお、楕円関数の単振り子への応用というと、左右に振れる状況を考察することが多いが、本稿では、一応すべての場合について解の表現を行うこととする。

## 2 単振り子の方程式

まず単振り子の微分方程式を紹介する。

単振り子は、長さ  $l$  の細長い軽い棒の端に質量  $m$  の重りをつけ、もう一方の端を原点に置き、抵抗なく左右に揺れる状態にしたときの重りの動きを考える (図 1)。なお、棒の代わりにひもで考えることが多いが、重りの揺れが大きい状況も考え

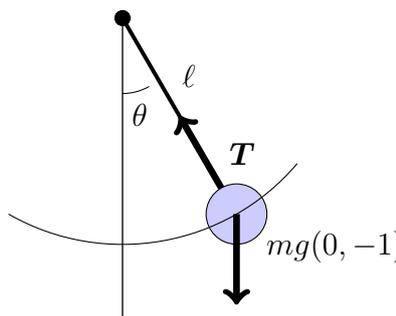


図 1: 単振り子

る場合、ひもだとそれが一直線であり続けることの保証が難しいため、本稿では変形しない棒でつなぐこととする。棒の重さは無視し、摩擦などもないとする。

$t$  を時刻、重りの位置を  $(x(t), y(t))$ 、棒の鉛直下向きに対する角を  $\theta(t)$ 、棒が重りを引く張力を  $\mathbf{T}$ 、 $T = |\mathbf{T}|$  とする。このとき、棒の角度から、

$$x(t) = \ell \sin \theta(t), \quad y(t) = -\ell \cos \theta(t), \quad \mathbf{T} = T(-\sin \theta(t), \cos \theta(t)) \quad (1)$$

となり、重りの運動方程式は、 $g$  を重力加速度とすると

$$m(x(t), y(t))'' = \mathbf{T} + mg(0, -1) \quad (2)$$

となる。(1) より、

$$\begin{aligned} x''(t) &= \ell(\theta' \cos \theta)' = \ell\theta'' \cos \theta - \ell(\theta')^2 \sin \theta, \\ y''(t) &= \ell(\theta' \sin \theta)' = \ell\theta'' \sin \theta + \ell(\theta')^2 \cos \theta \end{aligned}$$

となるので、(2) を  $\theta$  の方程式にすると、

$$\begin{aligned} \theta'' \cos \theta - (\theta')^2 \sin \theta &= -\frac{T}{\ell m} \sin \theta, \\ \theta'' \sin \theta + (\theta')^2 \cos \theta &= \frac{T}{\ell m} \cos \theta - \frac{g}{\ell} \end{aligned}$$

となるので、 $T$  を消去した方程式、および  $\theta''$  を消去した方程式を作ると、

$$\theta'' = -\frac{g}{\ell} \sin \theta, \quad (3)$$

$$(\theta')^2 = \frac{T}{\ell m} - \frac{g}{\ell} \cos \theta \quad (4)$$

が得られる。この (3) がいわゆる単振り子の微分方程式で、非線形の 2 階常微分方程式である。

一方、(4) は 1 階の方程式だが、 $\theta$  以外の未知関数  $T$  も含まれるので、それだけで解くことはできない。よって通常は (3) を考える。

揺れ  $\theta$  が小さい場合は、 $\sin \theta \doteq \theta$  なので、(3) は、

$$\theta'' = -\frac{g}{\ell} \theta \quad (5)$$

の解で近似できる。(5) は 2 階線形常微分方程式なので容易に解くことができ、

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \quad (6)$$

とすれば、

$$\theta = C_1 \sin \omega_0 t + C_2 \cos \omega_0 t \quad (7)$$

の単振動の解が得られる。この解の振動周期  $P_\ell$  は、

$$P_\ell = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} \quad (8)$$

となる。

次節以降では非線形の方程式 (3) の解、および周期などを考えていく。

### 3 エネルギーと力学系的考察

非線形の方程式 (3) は、表には  $t$  が現れない形なので、いわゆる階数低下法により 1 階の微分方程式に帰着させて解くことができるが、そのような形式的な解法ではなく、もう少し詳しく解の様子を追いつながりながら考えたいので、それとは別のエネルギー保存を利用する方法を用いる (といっても実質的にはそれほど変わらない)。

(3) の両辺に  $\theta'$  をかけると、

$$\theta''\theta' = -\omega_0^2 \theta' \sin \theta, \quad \left\{ \frac{(\theta')^2}{2} \right\}' = (\omega_0^2 \cos \theta)'$$

となるので、1 回積分できて

$$(\theta')^2 = 2\omega_0^2 \cos \theta + c_1 \quad (9)$$

が得られる ( $c_1$  は定数)。これは、1 階変数分離系の方程式なので、形式的にはここから解を求めることができるが、少しこの (9) を力学系的に考察してみる。

なお、重りの速度  $\boldsymbol{v}$  は、

$$|\boldsymbol{v}|^2 = |(x', y')|^2 = \ell^2 |(\theta' \cos \theta, \theta' \sin \theta)|^2 = \ell^2 (\theta')^2 \quad (10)$$

なので、運動エネルギーと位置エネルギーの和は (6), (9) より

$$\frac{m}{2} |\boldsymbol{v}|^2 + mgy(t) = \frac{m}{2} \ell^2 (\theta')^2 - mgl \cos \theta = \frac{m}{2} \ell^2 \{(\theta')^2 - 2\omega_0^2 \cos \theta\} = \frac{m}{2} \ell^2 c_1$$

となり定数となる。すなわち、(9) はエネルギー保存則と同等で、よって 1 階積分して得られた 1 階の方程式は、エネルギー保存を利用したと考えることができる。そして  $c_1$  は、総エネルギーに比例する値となる。

さて、(9) を力学系的に考察するとは、 $t$  が表面的に現れない方程式 (9) を、横軸  $\theta$ 、縦軸  $\theta'$  の相平面上の曲線と見て、時間  $t$  をその曲線のパラメータと見ること、解  $\theta$  の挙動を曲線上の点の移動と考えることである。

当然  $c_1$  の大きさによって、その曲線の形は変わり、 $c_1 < -2\omega_0^2$  であれば、(9) を満たす  $\theta, \theta'$  は存在しないので、 $c_1 \geq -2\omega_0^2$  に対して以下のように場合分けをして書いた曲線が図 2 である。

- I:  $c_1 = -2\omega_0^2$
- II:  $-2\omega_0^2 < c_1 < 2\omega_0^2$
- III:  $c_1 = 2\omega_0^2$
- IV:  $c_1 > 2\omega_0^2$

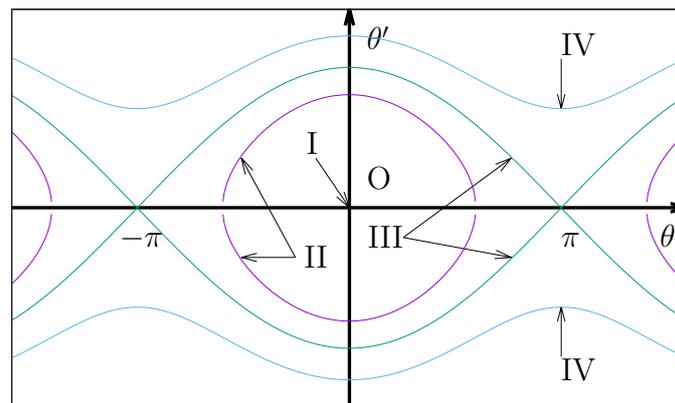


図 2: 相平面上の (9) の曲線

I の  $c_1 = -2\omega_0^2$  のときは、 $(\theta')^2 = 2\omega_0^2(\cos \theta - 1)$  より  $\theta = \theta' = 0$  の 1 点となる。

II の  $-2\omega_0^2 < c_1 < 2\omega_0^2$  のときは、 $-1 < -c_1/(2\omega_0^2) < 1$  より、

$$\cos \theta_0 = -\frac{c_1}{2\omega_0^2} \quad (0 < \theta_0 < \pi) \quad (11)$$

となる  $\theta_0$  がただひとつ決まり、(9) は

$$(\theta')^2 = 2\omega_0^2(\cos \theta - \cos \theta_0) \quad (12)$$

となり、 $-\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0$  の範囲の閉曲線となる。 $\theta$  軸の上では  $\theta' > 0$  だから  $\theta$  は増加して曲線上の点は右回りに進み、 $\theta$  軸の下では  $\theta' < 0$  だから  $\theta$  は減少して点はやはり曲線上を右回りに進む。ただし、 $\theta = \theta_0, \theta = -\theta_0$  の点に有限時間でたどりつくかは積分次第である。

III の  $c_1 = 2\omega_0^2$  のときは、

$$(\theta')^2 = 2\omega^2(\cos \theta + 1) = 4\omega^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}$$

より

$$\theta' = \pm 2\omega_0 \cos \frac{\theta}{2} \quad (13)$$

となる。これは、 $\theta = 0$  を通る解を想定すれば、 $-\pi \leq \theta \leq \pi$  の範囲を動き、 $\theta = \pm\pi$  では  $\theta' = 0$  となるが、そこまで有限時間でたどりつくかはやはり積分次第である。

IV の  $c_1 > 2\omega_0^2$  のときは、曲線は  $\theta' > 0$  の領域、または  $\theta' < 0$  の領域に横たわる無限に左から右に伸びる曲線になる。 $\theta'$  は正のある範囲、負のある範囲にあるので、その一定の範囲の速度で  $\theta$  は変化し、 $\theta$  は増え続けるか、または減り続ける。これは、振り子で言えば、支点の回りを 1 方向に永遠に回転し続ける解を意味する。

以後、これらの各場合の解の表現を求めていくが、I は容易で、上で見たように、これは  $\theta = 0$  という解、すなわち重りが鉛直下向きの位置で止まった状態のままであることを意味する。次節以降で、II, III, IV の解を見ていく。

## 4 II の解と楕円関数

本節では II の場合の方程式 (12) を考える。(12) は書きかえると、

$$(\theta')^2 = 4\omega_0^2 \left( \sin^2 \frac{\theta_0}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)$$

となり、 $\alpha = \sin(\theta_0/2)$  とすると  $0 < \theta_0 < \pi$  より  $0 < \alpha < 1$  となり、 $\theta$  の動く範囲は  $-\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0$  だったので、

$$\xi = \frac{1}{\alpha} \sin \frac{\theta}{2} = \frac{\sin(\theta/2)}{\sin(\theta_0/2)} \quad (14)$$

とすると  $\theta$  と  $\xi$  は 1 対 1 に対応し、 $-1 \leq \xi \leq 1$  で、

$$\begin{aligned} (\xi')^2 &= \frac{1}{4\alpha^2}(\theta')^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{\omega_0^2}{\alpha^2} \cos^2 \frac{\theta}{2} \left( \alpha^2 - \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \\ &= \frac{\omega_0^2}{\alpha^2} (1 - \alpha^2 \xi^2)(\alpha^2 - \alpha^2 \xi^2) = \omega_0^2 (1 - \alpha^2 \xi^2)(1 - \xi^2) \end{aligned} \quad (15)$$

となる。

まず、(15) の  $\omega_0 = 1$  に対する方程式

$$(z')^2 = (1 - z^2)(1 - \alpha^2 z^2) \quad (z = z(t)) \quad (16)$$

の解を考える。これは、変数分離形で、よってその解は、

$$E_1(z, \alpha) = \int_0^z \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-\alpha^2 s^2)}} \quad (17)$$

により表されることになる。この  $E_1(z, \alpha)$  は第 1 種楕円積分と呼ばれ、この逆関数が通常楕円関数と呼ばれる。その状況を少し詳しく考える。

$0 < \alpha < 1$  では (17) は  $z = \pm 1$  でも収束するので、 $E_1(z, \alpha)$  は  $-1 \leq z \leq 1$  で定義された関数となる。その  $z = 1$  での値

$$E_1(1, \alpha) = K_1(\alpha) = \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-\alpha^2 s^2)}} \quad (18)$$

は第 1 種完全楕円積分と呼ばれる。

### 命題 1

1.  $E_1(z, \alpha)$  は  $-1 \leq z \leq 1$  で単調増加な奇関数で、値域は  $[-K_1(\alpha), K_1(\alpha)]$
2.  $E_1(z, \alpha)$  の変曲点は  $z = 0$  のみで、 $0 < z < 1$  では下に凸。
3.  $E_1(z, +0) = \arcsin z$ ,  $K_1(+0) = \pi/2$ ,  $(E_1)_z(1-0, \alpha) = \infty$

証明

1. は容易。

2. は、

$$\begin{aligned} & (\{(1-z^2)(1-\alpha^2 z^2)\}^{-1/2})' \\ &= -\frac{1}{2}\{(1-z^2)(1-\alpha^2 z^2)\}^{-3/2}(-2z-2\alpha^2 z+4\alpha^2 z^3) \\ &= \{(1-z^2)(1-\alpha^2 z^2)\}^{-3/2}z(1+\alpha^2-2\alpha^2 z^2) \end{aligned}$$

と、 $0 < \alpha < 1$  より  $(1+\alpha^2)/(2\alpha^2) > 1$  から得られる。

3. は、Lebesgue 単調収束定理から容易に示される。■

この命題 1 より、 $E_1(z, \alpha)$  のグラフは  $\arcsin z$  のグラフと同様の形となることがわかる。そして、この  $E_1(z, \alpha)$  の逆関数

$$E_1(z, \alpha) = u \Leftrightarrow z = G(u, \alpha) \quad (19)$$

を通常  $z = \operatorname{sn}(u, \alpha)$  と書く。これが楕円関数の一つである。

しかし、この  $G(u, \alpha)$  は、今のところ定義域が  $[-K_1(\alpha), K_1(\alpha)]$ 、値域が  $[-1, 1]$  の単調増加な連続関数であるが、それに対し楕円関数  $\operatorname{sn}(u, \alpha)$  は、本来この  $G(u, \alpha)$  の定義域を後で述べるように実数全体に拡張した周期関数を指す。本稿では、拡張前の逆関数と、それを拡張した楕円関数を区別して書くこととし、 $\operatorname{sn}$  の記号はあえて用いないこととする。

## 補題 2

1.  $f(x)$  が  $(a - \delta, a + \delta)$  ( $\delta > 0$ ) で連続で、 $x = a$  以外では微分可能であり、 $f'(a + 0) = f'(a - 0) = A$  (有限値) のとき、 $f(x)$  は  $x = a$  でも微分可能で  $f'(a) = A$  となる。
2.  $f(x)$  が  $[-a, a]$  ( $a > 0$ ) 上の奇関数であるとき、

$$\begin{aligned} \bar{f}(x) &= \begin{cases} f(x) & (-a \leq x \leq a) \\ -f(x - 2a) & (a \leq x \leq 3a) \end{cases} \\ \bar{f}(x + 4a) &= \bar{f}(x) \quad (-\infty < x < \infty) \end{aligned} \quad (20)$$

のように実数全体で定義される周期関数に拡張した  $\bar{f}(x)$  も奇関数であり、もし  $f(x)$  が  $(-a, a)$  で  $C^2$  級で、かつ  $f'(a - 0) = 0$ ,  $f''(a - 0) = B$  (有限値) であれば  $\bar{f}$  も  $C^2$  級となる。

3.  $f(x)$  が  $[-a, a]$  ( $a > 0$ ) 上の奇関数であるとき、任意の整数  $m$  に対し、

$$\hat{f}(x) = f(x - 2ma) + 2mf(a) \quad ((2m - 1)a \leq x \leq (2m + 1)a) \quad (21)$$

として実数全体で定義される関数に拡張した  $\hat{f}(x)$  も奇関数であり、もし  $f(x)$  が  $(-a, a)$  で  $C^2$  級で、かつ  $f'(a - 0) = B$  (有限値),  $f''(a - 0) = 0$  であれば  $\hat{f}$  も  $C^2$  級となる。

証明

1. 平均値の定理より、 $-\delta < h < \delta$ ,  $h \neq 0$  なる各  $h$  に対し

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{h} = f'(a + hb_h)$$

で  $0 < b_h < 1$  となる  $b_h$  が取れ、よってこの式は  $h \rightarrow \pm 0$  のときいずれも  $A$  に収束する。

2. まず  $\bar{f}$  が奇関数であることを示す。 $(4m + 1)a \leq x \leq (4m + 3)a$  のときは、 $a \leq x - 4ma \leq 3a$  なので、

$$\bar{f}(x) = \bar{f}(x - 4ma) = -f(x - 4ma - 2a)$$

であり、一方  $-x$  は  $a \leq -x + (4m + 4)a \leq 3a$  で、 $f$  は奇関数なので、

$$\bar{f}(-x) = \bar{f}(-x + (4m + 4)a) = -f(-x + (4m + 2)a) = f(x - (4m + 2)a)$$

より  $\bar{f}(-x) = -\bar{f}(x)$  となる。

$(4m + 3)a \leq x \leq (4m + 5)a$  のときは、 $-a \leq x - (4m + 4)a \leq a$  より、

$$\bar{f}(x) = f(x - (4m + 4)a)$$

であり、 $-x$  は  $-a \leq -x + (4m + 4)a \leq a$  より

$$\bar{f}(-x) = f(-x + (4m + 4)a) = -f(x - (4m + 4)a)$$

よりやはり  $\bar{f}(-x) = -\bar{f}(x)$  となる。

次は  $C^2$  級についてであるが、 $\bar{f}$  は奇関数で周期  $4a$  なので、導関数の連続性については  $x = a$  のところだけを考えればよい。

$[-a, a]$  では  $\bar{f}'(x) = f'(x)$ 、 $[a, 3a]$  では  $\bar{f}'(x) = -f'(x - 2a)$  で、 $f'(x)$  は偶関数なので、

$$\bar{f}'(a - 0) = f'(a - 0) = 0, \quad \bar{f}'(a + 0) = -f'(-a + 0) = -f'(a - 0) = 0$$

となり、1. より  $\bar{f}'(a)$  も 0 となり、よって  $\bar{f}$  は  $C^1$  級となる。

$[-a, a]$  では  $\bar{f}''(x) = f''(x)$ 、 $[a, 3a]$  では  $\bar{f}''(x) = -f''(x - 2a)$  で、 $f''(x)$  は奇関数なので、

$$\bar{f}''(a - 0) = f''(a - 0) = B, \quad \bar{f}''(a + 0) = -f''(-a + 0) = f''(a - 0) = B$$

となり、1. より  $\bar{f}''(a)$  も  $B$  となり、よって  $C^2$  級となる。

3. 連続性は容易。奇関数であることは、 $(2m - 1)a \leq x \leq (2m + 1)a$  のときは、 $(-2m - 1)a \leq -x \leq (-2m + 1)a$  より

$$\hat{f}(-x) = f(-x + 2ma) - 2mf(a) = -f(x - 2ma) - 2mf(a) = -\hat{f}(x)$$

となることからわかる。 $C^2$  級であることも  $x = a$  のところだけを考えればよい。 $a \leq x \leq 3a$  では  $\hat{f}(x) = f(x - 2a) + 2f(a)$  より  $\hat{f}'(x) = f'(x - 2a)$ 、 $\hat{f}''(x) = f''(x - 2a)$  となる。よって、 $f'(x)$  が偶関数、 $f''(x)$  が奇関数であることにより、

$$\begin{aligned} \hat{f}'(a + 0) &= f'(-a + 0) = f'(a - 0) = B = \hat{f}'(a - 0), \\ \hat{f}''(a + 0) &= f''(-a + 0) = -f''(a - 0) = 0 = \hat{f}''(a - 0) \end{aligned}$$

より、1. により  $\hat{f}'(a) = B$ 、 $\hat{f}''(a) = 0$  となり  $C^2$  級となる。■

$E_1(z, \alpha)$  の逆関数  $G(u, \alpha)$  は、 $u$  に関して単調増加な奇関数で、命題 1 の 3. により  $G_u(K_1(\alpha) - 0, \alpha) = G_u(-K_1(\alpha) + 0, \alpha) = 0$  となる。これは  $\sin u$  の  $-\pi/2 \leq u \leq \pi/2$  でのグラフに似た形となる。

そして、この  $G(u, \alpha)$  を、補題 2 の 2. により周期関数に拡張した  $\bar{G}(u, \alpha)$  が、いわゆる楕円関数  $\operatorname{sn}(u, \alpha)$  である。よって、 $\bar{G}(u, \alpha)$  が  $C^2$  級であることを示すには、あとは  $G_{uu}(K_1(\alpha) - 0, \alpha)$  が有限な値であることを示せばよい。

$$E_1(G(u, \alpha)) = u$$

より、 $u$  で微分すると

$$(E_1)_z(G(u, \alpha), \alpha)G_u(u, \alpha) = 1$$

だから

$$G_u(u, \alpha) = \frac{1}{(E_1)_z(G(u, \alpha), \alpha)} = \sqrt{(1 - G^2)(1 - \alpha^2 G^2)} \quad (22)$$

となる。よって、

$$G_{uu}(u, \alpha) = \frac{(-2G - 2\alpha^2 G + 4\alpha^2 G^3)G_u}{2\sqrt{(1 - G^2)(1 - \alpha^2 G^2)}} = -(1 + \alpha^2)G + 2\alpha^2 G^3 \quad (23)$$

となるから、

$$G_{uu}(K_1(\alpha) - 0, \alpha) = -(1 + \alpha)^2 + 2\alpha^2 = \alpha^2 - 1$$

となり、よって補題 2 の 2. により  $G(u, \alpha)$  は  $C^2$  級であることがわかる。実際は、さらに上の階数の導関数も連続で、解析的につながることが知られている。

さて、II の (15) の解に戻る。特異解  $\xi(t) = \pm 1$  以外の解は、

$$\xi' = \pm \omega_0 \sqrt{(1 - \xi^2)(1 - \alpha^2 \xi^2)}$$

を変数分離して、

$$E_1(\xi, \alpha) = \pm(\omega_0 t + c_2)$$

となり、よって局所的、すなわち  $-K_1(\alpha) \leq \omega_0 t + c_2 \leq K_1(\alpha)$  である  $t$  に対しては、

$$\xi(t) = \pm G(\omega_0 t + c_2, \alpha)$$

として解が求まることになる。すなわち、 $G(\omega_0 t, \alpha)$ ,  $-G(\omega_0 t, \alpha)$  とそれらの平行移動が局所的な解となる。そしてその「最大延長解」は、 $G$ ,  $-G$  とその平行移動から構成される  $C^2$  級関数  $\bar{G}$  で表現されることになり、また  $-\bar{G}(u, \alpha) = \bar{G}(u - 2K_1(\alpha), \alpha)$

より  $-\bar{G}$  も  $\bar{G}$  の平行移動として表されるから、よって (15) の実数全体で定義される一般解は、

$$\xi(t) = \bar{G}(\omega_0 t + c_2, \alpha) \quad (24)$$

と表されることがわかった。よって、(14) より  $\theta$  は、

$$\theta(t) = 2 \arcsin(\alpha \bar{G}(\omega_0 t + c_2, \alpha)) \quad (25)$$

となる。(14) より  $\xi = \pm 1$  は解とはならないので、これが (12) の一般解となる。 $0 < \alpha < 1$  ではこれは滑らか (少なくとも  $C^2$  級) で、周期

$$P_{II} = \frac{4}{\omega_0} K_1(\alpha) = 4K \left( \sin \frac{\theta_0}{2} \right) \sqrt{\frac{\ell}{g}} \quad (26)$$

を持つ周期関数で、振幅は

$$|\theta(t)| \leq 2 \arcsin(\alpha) = \theta_0$$

となる。振幅  $\theta_0$  が  $\theta_0 \div 0$  ならば、周期 (26) は (8) の  $P_\ell$  に近いが ( $K_1(+0) = \pi/2$ )、そうでなければ周期は  $\ell$  だけでなく振幅  $\theta_0$  にも依存する振動となる。

特に、 $\theta_0 \rightarrow \pi - 0$  のときは、 $\alpha \rightarrow 1 - 0$  より、 $K_1(\alpha) \rightarrow K_1(1 - 0) = \infty$  となることが Lebesgue 単調収束定理より示される。それは、次節の III の  $c_1 = 2\omega_0^2$  の場合に対応する。

なお、 $\theta_0$  に対する解の周期と、 $\theta_0 = 0$  に対する解の周期の比

$$R(\theta_0) = \frac{K_1(\sin(\theta_0/2))}{K_1(0)} = \frac{2}{\pi} K_1 \left( \sin \frac{\theta_0}{2} \right)$$

は、以下のようなになる。

$\theta_0$	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°
$R(\theta_0)$	1.017	1.040	1.073	1.180	1.373	1.528	1.762

$R(\theta_0)$  は  $\theta_0$  が  $180^\circ$  では無限になるが、2 を越えるのは  $160^\circ$ 、3 を越えるのは  $176^\circ$ 、4 を越えるのは  $179.2^\circ$  なので、 $180^\circ$  にかなり近づかないとそれほど大きな値になるわけではない。

なお、最近の gnuplot には完全楕円関数が実装されていて、上の値はそれで計算したものである。

## 5 III の解

次は III の  $c_1 = 2\omega_0^2$  の場合の (13) の解を考える。まずは  $-\pi \leq \theta \leq \pi$  の範囲の解を見る。

この範囲では、 $z = \sin \frac{\theta}{2}$  により  $\theta$  と  $-1 \leq z \leq 1$  の範囲の  $z$  が 1 対 1 に対応する。(13) のプラスの方の方程式を  $z$  の式に変換すると、

$$z' = \frac{\theta'}{2} \cos \frac{\theta}{2} = w_0 \cos^2 \frac{\theta}{2} = \omega_0(1 - z^2)$$

より、 $z = \pm 1$  の特異解以外の一般解は、

$$\int \omega_0 dt = \int \frac{dz}{1 - z^2} = \int \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1 - z} - \frac{1}{1 + z} \right) dz = \frac{1}{2} \log \left| \frac{1 + z}{1 - z} \right| + c_3$$

となり、 $-1 \leq z \leq 1$  より  $(1 + z)/(1 - z) = e^{2\omega_0 t - 2c_3}$  なので、

$$z = \frac{e^{2\omega_0 t - 2c_3} - 1}{e^{2\omega_0 t - 2c_3} + 1} = \frac{e^{\omega_0 t - c_3} - e^{-\omega_0 t + c_3}}{e^{\omega_0 t - c_3} + e^{-\omega_0 t + c_3}} = \tanh(\omega_0 t - c_3) \quad (27)$$

となる。よって、(13) のマイナスの方も合わせると、(13) の解は

$$\theta = \pm 2 \arcsin(\tanh(\omega_0 t - c_3)) \quad (28)$$

となる。この解が、 $\theta = \pm\pi$  となるのは  $t \rightarrow \pm\infty$  のときなので、よって  $-\pi \leq \theta \leq \pi$  の範囲を越えることはない。

つまり、プラスの方は  $t = -\infty$  の時間に  $\theta = -\pi$  を出発して、無限の時間かけて  $\theta = \pi$  に届く解、マイナスの方は  $\theta = \pi$  から  $\theta = -\pi$  まで無限の時間かけて進むことになり、この III の場合は振動しない解となる。もちろん現実的にこの状況を起こすことはほぼ不可能である。

## 6 IV の解

最後は IV の  $c_1 > 2\omega_0^2$  の場合の方程式を考える。この場合、 $\beta = c_1/(2\omega_0^2)$  とすると  $\beta > 1$  であり、(9) は、

$$(\theta')^2 = 2\omega_0^2(\cos \theta + \beta) \quad (29)$$

となる。この場合  $\theta$  の動く範囲は実数全体となる。まず

$$\theta' = \pm \omega_0 \sqrt{2 \cos \theta + 2\beta} \quad (30)$$

のプラスの方の解を考える。なお、II の場合は、 $\theta'$  は 0 にもなり得たため、プラスの解とマイナスの解をつないで最大延長解を作ることができたが、この IV の場合は、 $\theta'$  は 0 にはなりえず、よって最大延長解はプラスの (30) の解のみから作らなければいけないことに注意する。

$\gamma = \sqrt{2/(\beta+1)}$  とすると  $0 < \gamma < 1$  で、

$$\sqrt{2 \cos \theta + 2\beta} = \sqrt{2\beta + 2 - 4 \sin^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{2}{\gamma} \sqrt{1 - \gamma^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}$$

となるので、(30) のプラスの方は

$$H_0(\theta, \gamma) = \int_0^\theta \frac{d\phi}{\sqrt{1 - \gamma^2 \sin^2(\phi/2)}} \quad (31)$$

に対し

$$H_0(\theta, \gamma) = 2 \left( \frac{\omega_0 t}{\gamma} + c_{4,0} \right) \quad (32)$$

が、少なくとも  $-\pi \leq \theta \leq \pi$  では成り立つことになる。

$-\pi \leq \theta \leq \pi$  に対して (31) を  $z = \sin(\phi/2)$  と置換すると、

$$H_0(\theta, \gamma) = 2 \int_0^{\sin(\theta/2)} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-\gamma^2 z^2)}} = 2E_1 \left( \sin \frac{\theta}{2}, \gamma \right) \quad (33)$$

となるので、(32) は

$$E_1 \left( \sin \frac{\theta}{2}, \gamma \right) = \frac{\omega_0 t}{\gamma} + c_{4,0} \quad (34)$$

となる。左辺は  $[-K_1(\gamma), K_1(\gamma)]$  の間に入るので、(34) は  $t$  の有限範囲でのみ成立する。(34) を  $\theta$  について解くと、 $-\pi \leq \theta \leq \pi$  に対しては

$$\theta(t) = 2 \arcsin \left( G \left( \frac{\omega_0 t}{\gamma} + c_{4,0}, \gamma \right) \right) \quad (35)$$

と書けることになる。

同様に、 $\pi \leq \theta \leq 3\pi$  に対しては、

$$H_1(\theta, \gamma) = \int_{2\pi}^{\theta} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - \gamma^2 \sin^2(\phi/2)}} \quad (36)$$

によって (30) は

$$H_1(\theta, \gamma) = 2 \left( \frac{\omega_0 t}{\gamma} + c_{4,1} \right) \quad (37)$$

となり、 $\pi \leq \theta \leq 3\pi$  では  $z = \sin(\phi/2)$  と置換すると、 $\cos(\phi/2) \leq 0$  なので、

$$\begin{aligned} H_1(\theta, \gamma) &= -2 \int_0^{\sin(\theta/2)} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-\gamma^2 z^2)}} = -2E_1 \left( \sin \frac{\theta}{2}, \gamma \right) \\ &= 2E_1 \left( \sin \frac{\theta - 2\pi}{2}, \gamma \right) \end{aligned} \quad (38)$$

となる。よって、 $-\pi \leq \theta - 2\pi \leq \pi$  より、

$$\theta(t) = 2 \arcsin \left( G \left( \frac{\omega_0 t}{\gamma} + c_{4,1}, \gamma \right) \right) + 2\pi \quad (39)$$

となる。これは、 $[-K_1(\gamma), K_1(\gamma)]$  から  $[-\pi/2, \pi/2]$  への単調増加な奇関数

$$I(u, \gamma) = \arcsin(G(u, \gamma)) \quad (40)$$

を、補題 2 の 3. により実数全体に拡張した単調増加関数  $\hat{I}(u, \gamma)$  に対応し、実際  $\theta$  の最大延長解はこれにより、

$$\theta(t) = 2\hat{I} \left( \frac{\omega_0 t}{\gamma} + c_{4,1}, \gamma \right) \quad (41)$$

と書けることになる。この  $\theta$  が滑らかであることを示すためには、 $I$  が補題 2 の 3. の条件、すなわち  $I_u(K_1(\gamma) - 0)$  が有限で、 $I_{uu}(K_1(\gamma) - 0) = 0$  を満たすことを示す必要がある。

(40) より、

$$\begin{aligned} I_u(u, \gamma) &= \frac{1}{\sqrt{1 - G(u, \gamma)^2}} G_u(u, \gamma) = \frac{1}{\sqrt{1 - G^2}} \sqrt{(1 - G^2)(1 - \gamma^2 G^2)} \\ &= \sqrt{1 - \gamma^2 G^2} \end{aligned} \quad (42)$$

となるので、 $I_u(K_1(\gamma) - 0, \gamma) = \sqrt{1 - \gamma^2}$  となり OK. また、 $I_{uu}$  は、

$$\begin{aligned} I_{uu}(u, \gamma) &= \frac{-\gamma^2 G G_u}{\sqrt{1 - \gamma^2 G^2}} = \frac{-\gamma^2 G}{\sqrt{1 - \gamma^2 G^2}} \sqrt{(1 - G^2)(1 - \gamma^2 G^2)} \\ &= -\gamma^2 G \sqrt{1 - G^2} \end{aligned}$$

となるので、 $I_{uu}(K_1(\gamma) - 0, \gamma) = 0$  となって、これで  $\hat{I}$  が滑らかであることが示されたことになる。

この  $I(u, \gamma)$  は振幅関数と呼ばれ、 $\text{am}(u, \gamma)$  と書かれることもあるようだが、これもむしろ  $\hat{I}(u, \gamma)$  のように拡張したものをそのように書いているのだろうと思う。また、(42) から、実は

$$\hat{I}_u(u, \gamma) = \sqrt{1 - \gamma^2 \bar{G}(u, \gamma)^2} \quad (43)$$

であることが言え、 $\bar{G}(u, \gamma)$  がより滑らかな解析関数であることから  $\hat{I}(u, \gamma)$  ( $= \text{am}(u, \gamma)$ ) も解析関数となることがわかる。

なお、私はそちらの専門家ではないので、なぜこれを「振幅」関数と呼ぶのかはよくわからない。

また、 $\hat{I}$  は単調増加関数で、当然周期的ではないが、関数のグラフの形は  $2K_1(\gamma)$  毎に同じ形が現れ、ある意味で周期的な様子となる。実際、(43) より、 $\hat{I}$  は周期関数の積分

$$\hat{I}(u, \gamma) = \int_0^u \sqrt{1 - \gamma^2 \bar{G}(v, \gamma)^2} dv \quad (44)$$

と書けるが、ここから、

$$\hat{I}(u, \gamma) = (\hat{I}(u, \gamma) - \tau u) + \tau u, \quad \tau = \frac{1}{2K_1(\gamma)} \int_0^{2K_1(\gamma)} \sqrt{1 - \gamma^2 \bar{G}^2} dv \quad (45)$$

とすると、 $\hat{I}(u, \gamma) - \tau u$  は周期関数となるから、周期関数と 1 次式の和に分離できることになる。なお、この  $\tau$  は、 $\bar{G}$  の対称性から

$$\tau = \frac{1}{K_1(\gamma)} \int_0^{K_1(\gamma)} \sqrt{1 - \gamma^2 G(v, \gamma)^2} dv$$

となり、 $G(v, \gamma) = z$  と置換すると  $v = E_1(z, \gamma)$  なので、

$$\begin{aligned}\tau &= \frac{1}{K_1(\gamma)} \int_0^1 \frac{\sqrt{1-\gamma^2 z^2}}{\sqrt{(1-z^2)(1-\gamma^2 z^2)}} dz = \frac{1}{K_1(\gamma)} \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} \\ &= \frac{\pi}{2K_1(\gamma)}\end{aligned}$$

と求まる。

また、(30) のマイナスの方の解は、言うまでもなく (41) の  $(-1)$  倍となり、よって、IV の一般解は、

$$\theta(t) = \pm 2\hat{I} \left( \frac{\omega_0 t}{\gamma} + c_4, \gamma \right) \quad (46)$$

となる。

## 7 最後に

1 節でも書いたように、本稿は別な目的で書き始めたものであるが、あらためて単振り子の方程式の解についてまとめてみることで、楕円関数との関係、楕円関数の拡張の方向、導関数などを詳しく確認することができた。

しかし本稿の内容は、既に知られていることばかりなのでさほど意味はないが、私の備忘録代わりにはなったと思う。

次は本来の目的の原稿の方 (非線形共鳴の話) にとりかかる予定であるが、本稿の内容が必要になるかどうかはよくわからない。

## 参考文献

- [1] 戸田盛和、「一般力学 30 講」、朝倉書店 (1994)
- [2] 森田健、「楕円関数論」(2008),  
<https://fuchino.ddo.jp/yatsugatake/ellipticx.pdf>
- [3] 野本隆宏、「単振り子の運動とヤコビの楕円関数」,  
<https://www.eng.niigata-u.ac.jp/~nomoto/23.html>

- 
- [4] 桂田祐史、「単振り子の話」(2007, 2012, 2015),  
<http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/labo/text/furiko.pdf>
- [5] マスオ(高校数学の美しい物語)、「単振り子の周期(近似解と厳密解の比較)」  
(2023),  
<https://manabitimes.jp/math/1273>