

2026 年 09 月 25 日

解の公式の累乗根を根の有理式で表現

新潟工科大学 基礎教育・教養系 竹野茂治

1 はじめに

本稿では、3 次方程式のカルダノによる解の公式、および 4 次方程式のフェラーリによる解の公式に現れる累乗根を、根の有理式で表すという計算を紹介する。

それは、アーベルによる「一般の 5 次方程式には累乗根による解の公式がない」という定理の証明に使われる事実なのだが、実際に 3 次、4 次の方程式の場合にそれらがどういう式になるのか、と思って計算してみたので、かなり泥臭い計算であるが、ここにまとめておく。

2 概要

最近、あらためてガロア理論や、アーベルによる 5 次方程式の累乗根による不可解性について [1],[2] で勉強してみた。

通常数学科では、[1] (いや、むしろ [1] より新しいもの) のような、体の拡大の理論と体上の自己同型群を用いた、いわゆる現代風の「ガロア理論」でそれらを学ぶのであるが、それだと理論は追いやすいのであるが、あまりわかったような気にはならない。少なくとも私には、なぜ累乗根で解が表せないのかがよくわからないままいつのまにかそれが言えていた、という感じだった。

それに対して [2] は、アーベルの定理をアーベルの頃の議論、すなわち体の拡大の理論や自己同型群は用いずに、根の置換と対称式の理論によって説明するもので、これだとアーベルの定理が成立する理屈が良くわかる。なお、この方向での説明は、[4] にもあるし、最近インターネットにもそのような方向の解説がある (例えば [3] など)。

その [2] に書かれている、アーベルの定理の証明のための重要な補題の一つが次のものである。

補題 1

一般の n 次方程式が累乗根のみで解けるならば、その累乗根はすべて、根 $x_1, \dots, x_n$ の有理式になる。

なお、[2] にも書かれているが、その有理式の係数には、定数として 1 の累乗根 (途中に出てくる累乗根と同じ巾の累乗根) も含まれることに注意する。

この補題 1 の証明は [2] に書かれているが、多少わかりにくさもある。特に最後に追加する累乗根の形は明確なのだが、それ以外は有理式ということ以外はその形は明確ではない。よって実際 3 次や 4 次方程式の場合に、この補題 1 の言う根の有理式はどのようなものになって、そこから解が得られる理由が見える形になっているのかが気になったので少し計算してみた。

3 設定

一般の n 次方程式は、本稿では

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0 \quad (1)$$

の形のものを指すが、この根を $x = x_1, x_2, \dots, x_n$ とするとき、(1) の解の公式とは、どんな $a_1, \dots, a_n$ に対しても、(1) の根を $a_1, \dots, a_n$ を用いて表す式

$$x_j = \phi_j(a_1, \dots, a_n) \quad (j = 1, \dots, n) \quad (2)$$

のことを指す。例えば、 $n = 2$ の場合は、

$$x^2 + a_1 x + a_2 = 0 \quad (3)$$

の解を表す式

$$x_1 = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2}, \quad x_2 = \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2} \quad (4)$$

のことを解の公式と呼ぶわけである。

なお、これを見てもわかるが、(2) の特定の x_j に特定の ϕ_j が対応する、ということではなく、解の公式が示す n 個の解の式 $\phi_1, \dots, \phi_n$ の集合が $x_1, \dots, x_n$ になる、ということになっている。例えば、上の 2 次方程式で x_1 を根号の + の方、 x_2 を根号の - の方と取ったが、そこに特に意味はなく、逆でも全く問題はない。その意味で代数的には根の $x_1, \dots, x_n$ のそれらを区別することはできない。

累乗根による「解の公式」とは、この ϕ_j が $a_1, \dots, a_n$ の有理式、およびその累乗根、およびそれらの有理式、およびそれらの累乗根、といった操作を何段か繰り返して作られる式、を意味する。

3 次、4 次方程式にはそのような解の公式が知られているが、5 次以上の方程式には「一般には」そのような解の公式はない、というのがアーベルの定理 (アーベル＝ルフィニの定理とも呼ばれる) である。

「一般には」というのは、具体的な数の $a_1, \dots, a_n$ の組に対しては、累乗根ですべての解が求まる方程式もあるが (例えば $x^5 = 1$ など)、どんな $a_1, \dots, a_n$ に対しても解を与えるような公式を作ることはできない、ということである。そしてその立場では、 $a_1, \dots, a_n$ を「変数」と考えて、その関数 $\phi_j(a_1, \dots, a_n)$ が、 $a_1, \dots, a_n$ に関して恒等的に方程式 (1) を満たすもの、という形で考える。

一方、解と係数の関係、すなわち

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$$

より、各 a_j は逆に根 $x_1, \dots, x_n$ の対称式として表される:

$$\begin{cases} a_1 &= -\sum_{i=1}^n x_i = -s_1, \\ a_2 &= \sum_{i<j} x_i x_j = s_2, \\ \dots & \\ a_n &= (-1)^n x_1 \cdots x_n = (-1)^n s_n \end{cases} \quad (5)$$

ここで、 s_j ($j = 1, \dots, n$) は $x_1, \dots, x_n$ の j 次の「基本対称式」として知られているもので、 $x_1, \dots, x_n$ のうちの j 個の異なるものの積の、すべての組み合わせに対する和となる:

$$s_j = s_j(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i_1 < \dots < i_j} x_{i_1} \cdots x_{i_j} \quad (6)$$

なお、便宜的に $s_0 = 1$ と定めておく。

上では「 $a_1, \dots, a_n$ を変数として」と書いたが、(5) を考えると、むしろ「 $x_1, \dots, x_n$ を独立変数」として考え、そこから (5) によって作られる従属変数 $a_1, \dots, a_n$ に対してその関数としての解の公式 $\phi_j(a_1, \dots, a_n)$ を作り、それが恒等的に方程式を満たす、すなわち $\phi_j(a_1, \dots, a_n)$ を (5) を代入して $x_1, \dots, x_n$ の式にしたときに、それがあある x_{k_j} に恒等的に一致するような ϕ_j を作る、というのが解の公式であるといいかえることができる:

$$\phi_j(a_1(x_1, \dots, x_n), \dots, a_n(x_1, \dots, x_n)) = x_{k_j}$$

例えば 2 次方程式 (3) で言えば、(4) の右辺が解の公式であるということは、その右辺に解と係数の関係

$$a_1 = -(x_1 + x_2), \quad a_2 = x_1 x_2$$

を代入したときに、

$$\sqrt{a_1^2 - 4a_2} = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = \pm(x_1 - x_2)$$

となるから、 $\sqrt{a_1^2 - 4a_2}$ としてこの + の方の $x_1 - x_2$ を取れば、

$$\begin{aligned} \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2} &= \frac{x_1 + x_2 + (x_1 - x_2)}{2} = x_1, \\ \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2} &= \frac{x_1 + x_2 - (x_1 - x_2)}{2} = x_2 \end{aligned}$$

が恒等的に成立する、ということを意味しているわけである。

なお、 $\sqrt{(x_1 - x_2)^2}$ は、通常の実数の世界では $|x_1 - x_2|$ となって、大小関係で場合分けをすることで符号を決定するのであるが、複素数の世界ではその区別ができないので、平方根は 2 種類あり、そのどちらかを任意に選択することになる。

同様に、 A の n 乗根 $\sqrt[n]{A}$ も複素数ではただひとつには決まらず、 n 個存在し、そのうちの 1 つを α と書くと、

$$\sqrt[n]{A} = \alpha, \quad \varepsilon_n \alpha, \quad \varepsilon_n^2 \alpha, \quad \dots, \quad \varepsilon_n^{n-1} \alpha \quad (7)$$

となる。ここで、 ε_n は、1 の n 乗根 (のひとつ)

$$\varepsilon_n = e^{2\pi i/n} = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$$

とする。通常は、(7) のうちのいずれか一つを $\sqrt[n]{A}$ と書くが、それらも代数的には区別はできない。

「累乗根による解の公式」という場合には、(7) のうちのひとつというよりは (7) の累乗根すべてを用いて解を表すことになるので、 n 乗根を追加する際に自然に 1 の n 乗根である ε_n も追加される (使ってよい) ことになり、よって解の公式では、その式の係数には有理数以外にも、追加する n 乗根に付随する ε_n も自然に追加されることになる。

なお、本稿では、 $a_k = (-1)^k s_k$ より、元の方程式の $a_1, \dots, a_n$ の代わりに $s_1, \dots, s_n$ を用いて、

$$x^n - s_1 x^{n-1} + s_2 x^{n-2} - \dots + (-1)^n s_n = 0 \quad (8)$$

の形で考えることにする。

なお、本稿ではこの後 1 の n 乗根 ($n > 2$) は 3 乗根しかでてこないなので、慣習に従って $\varepsilon_3 = \omega$ と書くことにする。 ω は良く知られているように以下を満たす。

$$\omega^3 = 1, \quad \omega^2 + \omega + 1 = 0, \quad \omega = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}, \quad \omega^2 = \bar{\omega} = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} \quad (9)$$

4 3 次方程式のカルダノの解法

まず 3 次方程式

$$x^3 - s_1 x^2 + s_2 x - s_3 = 0 \quad (10)$$

を考える。そのカルダノの解法 (カルダノ＝タルタリアの解法とも呼ばれる) に現れる根号を x_1, x_2, x_3 の有理式として表すのが本稿の最初の目標である。

まず、カルダノの解法を復習する。(10) に

$$x = t + \frac{s_1}{3} \quad (11)$$

を代入することで、(10) を 2 次の項のない t の 3 次方程式

$$t^3 + A_2 t + A_3 = 0 \quad (12)$$

に書き直す。(10) に (11) を代入すると、

$$\begin{aligned} & \left(t + \frac{s_1}{3}\right)^3 - s_1 \left(t + \frac{s_1}{3}\right)^2 + s_2 \left(t + \frac{s_1}{3}\right) - s_3 \\ &= t^3 + s_1 t^2 + \frac{s_1^2}{3} t + \frac{s_1^3}{27} - s_1 \left(t^2 + \frac{2}{3} s_1 t + \frac{s_1^2}{9}\right) + s_2 t + \frac{1}{3} s_1 s_2 - s_3 \\ &= t^3 + \left(-\frac{s_1^2}{3} + s_2\right) t - \frac{2}{27} s_1^3 + \frac{1}{3} s_1 s_2 - s_3 = 0 \end{aligned}$$

となるので、(12) の係数 A_j は

$$A_2 = -\frac{s_1^2}{3} + s_2, \quad A_3 = -\frac{2}{27}s_1^3 + \frac{1}{3}s_1s_2 - s_3 \quad (13)$$

となる。そして、(12) に $t = u + v$ を代入すると、

$$(u + v)^3 + A_2(u + v) + A_3 = (u^3 + v^3 + A_3) + (3uv + A_2)(u + v) = 0 \quad (14)$$

となるので、連立方程式

$$u^3 + v^3 = -A_3, \quad uv = -\frac{A_2}{3} \quad (15)$$

を満たす u, v を取れば (14) は満たされ、よって $t = u + v$ は (12) の解となり、(11) により解 x が求まる、というのがカルダノの解法である。

連立方程式 (15) は、2 本目を 3 乗すれば

$$u^3 + v^3 = -A_3, \quad u^3v^3 = -\frac{A_2^3}{27}$$

となり、よって u^3, v^3 は 2 次方程式

$$p^2 + A_3p - \frac{A_2^3}{27} = 0 \quad (16)$$

の解となり、それで u^3, v^3 の組 1 組が決まり (最終的には $u + v$ の形で使用するので u^3, v^3 を入れ替えるのは意味がない)、そのそれぞれの 3 乗根である 3 つずつの u, v のうち (15) の 2 本目を満たすものが求める u, v となる。

具体的には、(16) の解は

$$p = \frac{-A_3 \pm \sqrt{D_1}}{2}, \quad D_1 = A_3^2 + \frac{4}{27}A_2^3$$

となり、よって u^3 を

$$u^3 = \frac{-A_3 + \sqrt{D_1}}{2}$$

ととれば、

$$u = \sqrt[3]{\frac{-A_3 + \sqrt{D_1}}{2}}, \quad \omega \sqrt[3]{\frac{-A_3 + \sqrt{D_1}}{2}}, \quad \omega^2 \sqrt[3]{\frac{-A_3 + \sqrt{D_1}}{2}}$$

の 3 つの 3 乗根が決まる。同様に v も

$$v = \sqrt[3]{\frac{-A_3 - \sqrt{D_1}}{2}}, \quad \omega \sqrt[3]{\frac{-A_3 - \sqrt{D_1}}{2}}, \quad \omega^2 \sqrt[3]{\frac{-A_3 - \sqrt{D_1}}{2}}$$

となるのであるが、このうち $uv = -A_2/3$ を満たす v は各 u に対して 1 つだけ、すなわち

$$v = -A_2/(3u)$$

で決まり、それにより u, v が 3 組得られることになる。今、

$$u = u_0 = \sqrt[3]{\frac{-A_3 + \sqrt{D_1}}{2}}$$

に対して $v_0 = -A_2/(3u_0)$ とすれば、 v_0 は上の 3 つの v のうちのひとつであり、また (u_0, v_0) 以外の (15) の解 2 組は $(\omega u_0, \omega^2 v_0)$ と $(\omega^2 u_0, \omega v_0)$ となり、よって (10) の解 x は、

$$x_1 = u_0 + v_0 + \frac{s_1}{3}, \quad x_2 = \omega u_0 + \omega^2 v_0 + \frac{s_1}{3}, \quad x_3 = \omega^2 u_0 + \omega v_0 + \frac{s_1}{3} \quad (17)$$

と得られることになる。

5 3 次方程式の累乗根

前節のカルダノの解法で追加した累乗根は、

$$I_1 = \sqrt{D_1} = \sqrt{A_3^2 + \frac{4}{27}A_2^3} \quad (18)$$

と、

$$I_2 = \sqrt[3]{\frac{-A_3 + \sqrt{D_1}}{2}} = \sqrt[3]{\frac{-A_3 + I_1}{2}} \quad (19)$$

である。次はこれらを x_1, x_2, x_3 の有理式に変形することを考える。

なお、(18) は実際には $\pm$ のついた 2 つの平方根があり、よって I_2 の (19) の累乗根の中の I_1 も $\pm$ のついた 2 種類のものがある (前節の u と v に対応する)。さらに I_2 は

3 乗根なので ω 倍と ω^2 倍の 3 種類、よって I_2 は合計 6 種類あることになるが、根が有理式で表されることを確認するだけなら、 I_1 は平方根のうちの 1 つのみ考えればよく、その 1 つに対してのみ I_2 を考え、3 乗根もそのうちの 1 つのみを考えればよい。

実際、 I_2 は $+I_1$ に対するものが x_1, x_2, x_3 に対する有理式となれば、 $-I_1$ に対する I_2 は、(15) より $v = -A_2/(3u)$ と表されるから明らかにそれ也有理式となるし、 ω, ω^2 倍の定数倍については当然考える必要はない。しかし、根の有理式が実際にどのような式になるかについていえば、 $+I_1$ に対する I_2 と $-I_1$ に対する I_2 (すなわち u と v) の両方を見る必要があり、本稿でもそれを確認する。

以下では、 I_1, I_2 の有理式を求めるために、 I_1^2, I_2^3 をそれぞれ x_1, x_2, x_3 の有理式の 2 乗、3 乗の形への変形を行っていく。ただし、その係数には、前節でも述べたように ω が含まれることに注意する。なお、それは、[2] にも書かれている。

計算の方針としては、 I_1^2, I_2^3 に (13) を代入して s_1, s_2, s_3 の式にして、それに (6) を代入して整理していけばよいのであるが、それだと変数が多くてかなり大変なので、変数を一つ減らす作業を最初に紹介する。今、

$$\bar{x}_1 = x_1 - x_3, \quad \bar{x}_2 = x_2 - x_3$$

とし、 $s_j = s_j(x_1, x_2, x_3)$ の x_1, x_2, x_3 を $\bar{x}_1, \bar{x}_2, 0$ に置き換えたものを $\bar{s}_j$ とし、 $A_k = A_k(s_1, s_2, s_3)$ の x_1, x_2, x_3 を $\bar{x}_1, \bar{x}_2, 0$ に置き換えたもの (すなわち s_1, s_2, s_3 を $\bar{s}_1, \bar{s}_2, \bar{s}_3$ に置き換えたもの) を $\bar{A}_k$ とする。

$$\bar{s}_j = s_j(\bar{x}_1, \bar{x}_2, 0) \quad (j = 1, 2, 3), \quad \bar{A}_k = A_j(\bar{s}_1, \bar{s}_2, \bar{s}_3) \quad (k = 2, 3) \quad (20)$$

これによって、実質的に $x_3 = 0$ としたような式になり、また $\bar{s}_3$ も 0 となるので、変数が一つ減らせる格好になる。その具体的な表現を見てみる。

$$s_1 = x_1 + x_2 + x_3, \quad s_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3, \quad s_3 = x_1x_2x_3$$

に対して (20) より $\bar{s}_j$ は

$$\bar{s}_1 = \bar{x}_1 + \bar{x}_2, \quad \bar{s}_2 = \bar{x}_1\bar{x}_2, \quad \bar{s}_3 = 0 \quad (21)$$

とし、 $\bar{A}_k$ は (13), (20) より

$$\bar{A}_2 = -\frac{\bar{s}_1^2}{3} + \bar{s}_2, \quad \bar{A}_3 = -\frac{2}{27}\bar{s}_1^3 + \frac{1}{3}\bar{s}_1\bar{s}_2 \quad (22)$$

とすることになる。そしてこれに対して s_j と $\bar{s}_j$ の関係、 A_k と $\bar{A}_k$ の関係を見てみる。

$$s_1 = x_1 + x_2 + x_3 = (\bar{x}_1 + x_3) + (\bar{x}_2 + x_3) + x_3 = \bar{s}_1 + 3x_3 \quad (23)$$

$$\begin{aligned} s_2 &= x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 \\ &= (\bar{x}_1 + x_3)(\bar{x}_2 + x_3) + (\bar{x}_1 + x_3)x_3 + (\bar{x}_2 + x_3)x_3 \\ &= \bar{x}_1\bar{x}_2 + 2(\bar{x}_1 + \bar{x}_2)x_3 + 3x_3^2 = \bar{s}_2 + 2\bar{s}_1x_3 + 3x_3^2 \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} s_3 &= x_1x_2x_3 = (\bar{x}_1 + x_3)(\bar{x}_2 + x_3)x_3 = \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 + (\bar{x}_1 + \bar{x}_2)x_3^2 + x_3^3 \\ &= \bar{s}_2x_3 + \bar{s}_1x_3^2 + x_3^3 \end{aligned} \quad (25)$$

となる。これらを (13) に代入すると、

$$\begin{aligned} A_2 &= -\frac{s_1^2}{3} + s_2 = -\frac{1}{3}(\bar{s}_1 + 3x_3)^2 + \bar{s}_2 + 2\bar{s}_1x_3 + 3x_3^2 \\ &= -\frac{1}{3}(\bar{s}_1^2 + 6\bar{s}_1x_3 + 9x_3^2) + \bar{s}_2 + 2\bar{s}_1x_3 + 3x_3^2 = -\frac{\bar{s}_1^2}{3} + \bar{s}_2 = \bar{A}_2, \\ A_3 &= -\frac{2}{27}s_1^3 + \frac{1}{2}s_1s_2 - s_3 \\ &= -\frac{2}{27}(\bar{s}_1 + 3x_3)^3 + \frac{1}{3}(\bar{s}_1 + 3x_3)(\bar{s}_2 + 2\bar{s}_1x_3 + 3x_3^2) - (\bar{s}_2x_3 + \bar{s}_1x_3^2 + x_3^3) \\ &= -\frac{2}{27}(\bar{s}_1^3 + 9\bar{s}_1^2x_3 + 27\bar{s}_1x_3^2 + 27x_3^3) \\ &\quad + \frac{1}{3}(\bar{s}_1\bar{s}_2 + 3\bar{s}_2x_3 + 2\bar{s}_1^2x_3 + 9\bar{s}_1x_3^2 + 9x_3^3) - \bar{s}_2x_3 - \bar{s}_1x_3^2 - x_3^3 \\ &= -\frac{2}{27}\bar{s}_1^3 + \frac{1}{3}\bar{s}_1\bar{s}_2 + \bar{s}_2x_3(1-1) + \bar{s}_1^2x_3\left(-\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\right) + \bar{s}_1x_3^2(-2+3-1) \\ &\quad + x_3^3(-2+3-1) \\ &= -\frac{2}{27}\bar{s}_1^3 + \frac{1}{3}\bar{s}_1\bar{s}_2 = \bar{A}_3 \end{aligned}$$

となり、 $A_2 = \bar{A}_2$, $A_3 = \bar{A}_3$, すなわち A_k は不変であることがわかる。実はこれらは一般化できる。本筋とは関係ないが、あとで 4 次方程式でも使用するので、少し寄り道してその一般化を簡単に紹介する。

n 次方程式 (8) に対しても、

$$x = t + \frac{s_1}{n} \quad (26)$$

により $n-1$ 次の項を消した方程式

$$t^n + A_2t^{n-2} + \cdots + A_n = 0 \quad (27)$$

の係数として $A_k = A_k(s_1, \dots, s_n)$ を定義する。この A_k は、便宜的に $s_0 = 1, A_0 = 1, A_1 = 0$ とすれば、

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=0}^n x^j (-1)^{n-j} s_{n-j} &= \sum_{j=0}^n \left(t + \frac{s_1}{n}\right)^j (-1)^{n-j} s_{n-j} \\
 &= \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} s_{n-j} \sum_{\ell=0}^j \binom{j}{\ell} t^\ell \left(\frac{s_1}{n}\right)^{j-\ell} = \sum_{\ell=0}^n t^\ell \sum_{j=\ell}^n \frac{(-1)^{n-j}}{n^{j-\ell}} \binom{j}{\ell} s_{n-j} s_1^{j-\ell} \\
 &= \sum_{\ell=0}^n t^\ell \sum_{j=\ell}^n C(j, \ell) = \sum_{\ell=0}^n t^\ell \sum_{m=0}^{n-\ell} C(n-m, \ell) = \sum_{k=0}^n t^{n-k} \sum_{m=0}^k C(n-m, n-k) \\
 &= \sum_{k=0}^n t^{n-k} A_k
 \end{aligned}$$

より、

$$A_k = \sum_{m=0}^k C(n-m, n-k) = \sum_{m=0}^k \frac{(-1)^m}{n^{k-m}} \binom{n-m}{n-k} s_m s_1^{k-m} \quad (28)$$

となる。この $m = 0, 1$ の項は

$$\frac{1}{n^k} \binom{n}{n-k} s_1^k - \frac{1}{n^{k-1}} \binom{n-1}{n-k} s_1 s_1^{k-1}$$

で同類項なのでまとめると、

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{n^k} \binom{n}{n-k} - \frac{1}{n^{k-1}} \binom{n-1}{n-k} &= \frac{1}{n^k} \left\{ \binom{n}{k} - n \binom{n-1}{k-1} \right\} \\
 &= \frac{1}{n^k} \left\{ \binom{n}{k} - k \binom{n}{k} \right\} = -\frac{k-1}{n^k} \binom{n}{k}
 \end{aligned}$$

となるので、よって、 A_k は

$$A_k = -\frac{k-1}{n^k} \binom{n}{k} s_1^k + \sum_{m=2}^k \frac{(-1)^m}{n^{k-m}} \binom{n-m}{n-k} s_m s_1^{k-m} \quad (29)$$

と表される。

そして、 $\bar{x}_j$ を $\bar{x}_j = x_j - x_n$ とし、(6) の $s_j = s_j(x_1, \dots, x_n)$ に対して $\bar{s}_j$ を

$$\bar{s}_j = s_j(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n-1}, 0) \quad (1 \leq j \leq n)$$

と定め、(28) の $A_k = A_k(s_1, \dots, s_n)$ に対して $\bar{A}_k$ を

$$\bar{A}_k = A_k(\bar{s}_1, \dots, \bar{s}_n) \quad (30)$$

と定めると、 $\bar{s}_n = 0$ で、 $A_k = \bar{A}_k$ となる。これを次に示そう。

まずは (23), (24), (25) の一般化である s_j と $\bar{s}_j$ の一般的な関係式を紹介する (しかし本稿ではほぼ使用しない)。

命題 2

$$s_j = \sum_{k=0}^j \binom{n-k}{n-j} \bar{s}_k x_n^{j-k} \quad (1 \leq j \leq n)$$

ただし、 $\bar{s}_0 = 1, \bar{s}_n = 0$ とする。

証明

まず $1 \leq j < n$ の s_j について考える。

(6) の和のうち、 x_n を含まないものを R_1 , x_n を含むものを R_2 とする。

$$s_j = R_1 + R_2, \quad \begin{cases} R_1 = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_j < n} x_{i_1} \cdots x_{i_j} \\ R_2 = x_n \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{j-1} \leq n-1} x_{i_1} \cdots x_{i_{j-1}} \end{cases}$$

R_1 は $x_1, \dots, x_{n-1}$ の対称式だから、 $x_j = \bar{x}_j + x_n$ を代入した式も x_n の有理式を係数に持つ $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n-1}$ の対称式。元々の R_1 の項数は $\binom{n-1}{j}$ 個あり、

$$x_{i_1} \cdots x_{i_j} = (\bar{x}_{i_1} + x_n) \cdots (\bar{x}_{i_j} + x_n)$$

を展開すると $\bar{x}$ の k 個 ($0 \leq k \leq j$) の異なるものの積と x_n^{j-k} の積の項が出てくるが、この $\bar{x}$ の k 次の項はここからは $\binom{j}{k}$ 個出てくる。それらのすべての和が R_1 で $\bar{s}_k x_n^{j-k}$ の項を作るが、対称式なのですべての $\bar{x}$ の k 次の係数は重複分だけ同じ係数がつく。 $\bar{s}_k$ の項数は $\binom{n-1}{k}$ なので、よってその係数は、

$$\begin{aligned} \frac{\binom{n-1}{j} \binom{j}{k}}{\binom{n-1}{k}} &= \frac{\frac{(n-1)!}{j!(n-j-1)!} \cdot \frac{j!}{k!(j-k)!}}{\frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!}} = \frac{(n-k-1)!}{(n-j-1)!(j-k)!} \\ &= \binom{n-k-1}{n-j-1} \end{aligned}$$

となる。よって、

$$R_1 = \sum_{k=0}^j \binom{n-k-1}{n-j-1} \bar{s}_k x_n^{j-k}$$

となる。一方 R_2 は R_1 より j が一つ少なく、 x_n 倍が外につくので、

$$R_2 = x_n \sum_{k=0}^{j-1} \binom{n-k-1}{n-j} \bar{s}_k x_n^{j-1-k} = \sum_{k=0}^{j-1} \binom{n-k-1}{n-j} \bar{s}_k x_n^{j-k}$$

となる。なお、 $k=j$ の場合 $\binom{n-k-1}{n-j} = \binom{n-j-1}{n-j} = 0$ なので、 R_2 は

$$R_2 = \sum_{k=0}^j \binom{n-k-1}{n-j} \bar{s}_k x_n^{j-k}$$

と書けることになるが、

$$\binom{n-k-1}{n-j-1} + \binom{n-k-1}{n-j} = \binom{n-k}{n-j}$$

より、よって

$$s_j = R_1 + R_2 = \sum_{k=0}^j \binom{n-k}{n-j} \bar{s}_k x_n^{j-k}$$

となって $1 \leq j < n$ の場合は命題 2 は成立する。

次に $j = n$ の場合であるが、この場合 $R_1 = 0$ で、

$$s_n = x_n x_1 \cdots x_{n-1} = x_n (\bar{x}_1 + x_n) \cdots (\bar{x}_{n-1} + x_n)$$

の展開では同類項はなく、すべての係数が 1 なので、

$$s_n = x_n \sum_{k=1}^{n-1} \bar{s}_k x_n^{n-1-k} = \sum_{k=1}^{n-1} \bar{s}_k x_n^{n-k}$$

となって、よってこの場合も命題 2 は成立する。■

命題 3

$$A_k = \bar{A}_k \quad (2 \leq k \leq n)$$

証明

便宜的に $s_0 = 1, A_0 = 1, A_1 = 0$ とする。方程式 (8) の左辺を $f(x)$ と書くことにする。

$$f(x) = \sum_{k=0}^n x^{n-k} (-1)^k s_k = (x - x_1) \cdots (x - x_n)$$

であり、またここに (26) を代入して t の n 次式にまとめたものが (27) であるから、

$$f(x) = \sum_{k=0}^n t^{n-k} A_k(s_1, \dots, s_n) = \left(t + \frac{s_1}{n} - x_1\right) \cdots \left(t + \frac{s_1}{n} - x_n\right) \quad (31)$$

である。ここで、 $x_j = \bar{x}_j + x_n$ とすると $s_1 = \bar{s}_1 + nx_n$ で、

$$\frac{s_1}{n} - x_j = \frac{\bar{s}_1}{n} + x_n - x_j = \frac{\bar{s}_1}{n} - \bar{x}_j$$

となるので、

$$f(x) = \left(t + \frac{\bar{s}_1}{n} - \bar{x}_1\right) \cdots \left(t + \frac{\bar{s}_1}{n} - \bar{x}_{n-1}\right) \left(t + \frac{\bar{s}_1}{n}\right)$$

となる。これは、(31) の右辺の $x_1, \dots, x_n$ を、 $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n-1}, 0$ に置き換えた式なので、 s_j を $\bar{s}_j$ で置き換えたものにもなっていて、よって $\bar{A}_k$ の定義 (30) より

$$f(x) = \sum_{k=0}^n t^{n-k} A_k(\bar{s}_1, \dots, \bar{s}_n) = \sum_{k=0}^n t^{n-k} \bar{A}_k$$

となる。この式と (31) は t に関して恒等式なので、係数を比較して $A_k = \bar{A}_k$ が得られる。■

さて I_1^2, I_2^3 に戻る。これらを $\bar{A}_k, \bar{s}_j$ に置きかえて計算していく。

(18), (21), (22) より、

$$\begin{aligned} I_1^2 &= A_3^2 + \frac{4}{27} A_2^3 = \bar{A}_3^2 + \frac{4}{27} \bar{A}_2^3 = \left(-\frac{2}{27} \bar{s}_1^3 + \frac{1}{3} \bar{s}_1 \bar{s}_2\right)^2 + \frac{4}{27} \left(-\frac{1}{3} \bar{s}_1^2 + \bar{s}_2\right)^3 \\ &= \left(\frac{4}{36} \bar{s}_1^6 - \frac{4}{34} \bar{s}_1^4 \bar{s}_2 + \frac{1}{9} \bar{s}_1^2 \bar{s}_2^2\right) + \frac{4}{27} \left(-\frac{1}{27} \bar{s}_1^6 + \frac{1}{3} \bar{s}_1^4 \bar{s}_2 - \bar{s}_1^2 \bar{s}_2^2 + \bar{s}_2^3\right) \\ &= \bar{s}_1^6 \left(\frac{4}{36} - \frac{4}{36}\right) + \bar{s}_1^4 \bar{s}_2 \left(-\frac{4}{34} + \frac{4}{81}\right) + \bar{s}_1^2 \bar{s}_2^2 \left(\frac{1}{9} - \frac{4}{27}\right) + \frac{4}{27} \bar{s}_2^3 \\ &= -\frac{1}{27} \bar{s}_1^2 \bar{s}_2^2 + \frac{4}{27} \bar{s}_2^3 = \frac{\bar{s}_2^2}{27} (4\bar{s}_2 - \bar{s}_1^2) = \frac{\bar{x}_1^2 \bar{x}_2^2}{27} (4\bar{x}_1 \bar{x}_2 - (\bar{x}_1 + \bar{x}_2)^2) \\ &= -\frac{\bar{x}_1^2 \bar{x}_2^2}{27} (\bar{x}_1 - \bar{x}_2)^2 \end{aligned}$$

となるので、 I_1 は、平方根の片方を取れば、

$$I_1 = \frac{\sqrt{3}i}{9}(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)\bar{x}_1\bar{x}_2 \quad (32)$$

となる。ここで、 ω は (9) より $\sqrt{3}i = \omega - \omega^2$ と ω で表せる。また、差積 P_n を

$$P_n = P_n(x_1, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)$$

と定義すると、

$$\bar{P}_2\bar{s}_2 = (\bar{x}_1 - \bar{x}_2)\bar{x}_1\bar{x}_2 = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3) = P_3(x_1, x_2, x_3)$$

と書ける。よって、 I_1 は、

$$I_1 = \frac{\omega - \omega^2}{9}\bar{P}_2\bar{s}_2 = \frac{\omega - \omega^2}{9}P_3 \quad (33)$$

と書けることがわかる。これが I_1 を表す有理式 (3 次の多項式) である。なお、最初に追加される累乗根は一般に差積の定数倍であることが [2] でも示されている。

次は I_2^3 。(19), (21), (22), (32) より、

$$\begin{aligned} I_2^3 &= \frac{-A_3 + I_1}{2} = -\frac{1}{2}\bar{A}_3 + \frac{I_1}{2} \\ &= \frac{1}{27}\bar{s}_1^3 - \frac{1}{6}\bar{s}_1\bar{s}_2 + \frac{\sqrt{3}i}{18}(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)\bar{x}_1\bar{x}_2 \\ &= \frac{1}{27} \left\{ (\bar{x}_1 + \bar{x}_2)^3 - \frac{9}{2}(\bar{x}_1 + \bar{x}_2)\bar{x}_1\bar{x}_2 + \frac{3\sqrt{3}i}{2}(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)\bar{x}_1\bar{x}_2 \right\} \\ &= \frac{1}{27} \left\{ \bar{x}_1^3 + \bar{x}_2^3 - \frac{3}{2}(\bar{x}_1 + \bar{x}_2)\bar{x}_1\bar{x}_2 + \frac{3\sqrt{3}i}{2}(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)\bar{x}_1\bar{x}_2 \right\} \\ &= \frac{1}{27} \left\{ \bar{x}_1^3 + \bar{x}_2^3 + 3\bar{x}_1\bar{x}_2 \left(\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}\bar{x}_1 + \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}\bar{x}_2 \right) \right\} \\ &= \frac{1}{27} \{ \bar{x}_1^3 + (\omega\bar{x}_2)^3 + 3\bar{x}_1^2(\omega\bar{x}_2) + 3\bar{x}_1(\omega\bar{x}_2)^2 \} = \left\{ \frac{1}{3}(\bar{x}_1 + \omega\bar{x}_2) \right\}^3 \end{aligned}$$

となるので、よって I_2 は 3 乗根のひとつを取れば、

$$I_2 = \frac{1}{3}(\bar{x}_1 + \omega\bar{x}_2) = \frac{1}{3}(x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3) \quad (34)$$

となる。ここで、 $-x_3 - \omega x_3 = (-1 - \omega)x_3 = \omega^2 x_3$ である。

ちなみに、 I_1 を $-I_1$ にして I_2 を計算すると係数が共役に代わるので、それに対する I_2 は

$$I'_2 = \frac{1}{3}(\bar{x}_1 + \omega^2 \bar{x}_2) = \frac{1}{3}(x_1 + \omega^2 x_2 + \omega x_3) \quad (35)$$

となる。この (33), (34), (35) が目標とした累乗根を根で表した有理式であるが、実際にはいずれも根の多項式になっていることがわかる。

なお、この (34) と (35) と係数 s_1 があれば、

$$\begin{cases} s_1 &= x_1 + x_2 + x_3 \\ 3I_2 &= x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3 \\ 3I'_2 &= x_1 + \omega^2 x_2 + \omega x_3 \end{cases} \quad (36)$$

より、(9) から容易に

$$\begin{cases} x_1 &= \frac{1}{3}(s_1 + 3I_2 + 3I'_2) \\ x_2 &= \frac{1}{3}(s_1 + 3\omega^2 I_2 + 3\omega I'_2) \\ x_3 &= \frac{1}{3}(s_1 + 3\omega I_2 + 3\omega^2 I'_2) \end{cases} \quad (37)$$

が得られる。すなわち 3 次方程式の解が求まることになる。

I_2, I'_2 は、4 節の u_0, v_0 に対応するので、これは丁度カルダノの解 (17) 一致していることもわかる。

6 4 次方程式のフェラーリの解法

次は 4 次方程式を考える。まずはフェラーリの解法を紹介する。方程式

$$x^4 - s_1 x^3 + s_2 x^2 - s_3 x + s_4 = 0$$

に $x = t + s_1/4$ を代入して

$$t^4 + A_2 t^2 + A_3 t + A_4 = 0 \quad (38)$$

とすると (29) より

$$\begin{aligned}
 A_2 &= -\frac{1}{4^2}6s_1^2 + \sum_{m=2}^2 \frac{(-1)^m}{4^{2-m}} \binom{4-m}{4-2} s_m s_1^{2-m} = -\frac{3}{8}s_1^2 + s_2, \\
 A_3 &= -\frac{2}{4^3}4s_1^3 + \sum_{m=2}^3 \frac{(-1)^m}{4^{3-m}} \binom{4-m}{4-3} s_m s_1^{3-m} = -\frac{1}{8}s_1^3 + \frac{1}{2}s_1 s_2 - s_3, \\
 A_4 &= -\frac{3}{4^4}s_1^4 + \sum_{m=2}^4 \frac{(-1)^m}{4^{4-m}} \binom{4-m}{4-4} s_m s_1^{4-m} \\
 &= -\frac{3}{256}s_1^4 + \frac{1}{16}s_1^2 s_2 - \frac{1}{4}s_1 s_3 + s_4
 \end{aligned}$$

なので、

$$\begin{cases} \bar{A}_2 = -\frac{3}{8}\bar{s}_1^2 + \bar{s}_2 \\ \bar{A}_3 = -\frac{1}{8}\bar{s}_1^3 + \frac{1}{2}\bar{s}_1 \bar{s}_2 - \bar{s}_3 \\ \bar{A}_4 = -\frac{3}{256}\bar{s}_1^4 + \frac{1}{16}\bar{s}_1^2 \bar{s}_2 - \frac{1}{4}\bar{s}_1 \bar{s}_3 \end{cases} \quad (39)$$

となる。

(38) の左辺に t^4 を残してその他は右辺に移項し、両辺に $t^2 z + z^2/4$ を加える。

$$t^4 + t^2 z + \frac{z^2}{4} = (z - A_2)t^2 - A_3 t + \frac{z^2 - 4A_4}{4} \quad (40)$$

左辺は $t^2 + z/2$ の 2 乗なので、右辺も完全平方になるような z を取る。すなわち、右辺の t の 2 次式の判別式が

$$D_2 = A_3^2 - (z - A_2)(z^2 - 4A_4) = 0 \quad (41)$$

となるような z を一つ取る。これは z の 3 次方程式なので、その解 z を求めるために累乗根が 2 つ追加されることになる。そしてその z に対して (40) は

$$\left(t^2 + \frac{z}{2}\right)^2 = (z - A_2) \left(t - \frac{A_3}{2(z - A_2)}\right)^2$$

となるので、この t の 4 次方程式は 2 本の 2 次方程式

$$t^2 + \frac{z}{2} = \pm \sqrt{z - A_2} \left(t - \frac{A_3}{2(z - A_2)}\right) \quad (42)$$

に直すことができ、この 2 本の 2 次方程式を解くことで 4 つの t が求まり、 $x = t + s_1/4$ により 4 つの x が求まる、というのがフェラーリの解法である。

7 4 次方程式の累乗根

フェラーリの解法で追加される累乗根は、まず分解方程式とも呼ばれる (41) の 3 次方程式の解を表すための 2 つ。(41) は

$$z^3 - A_2 z^2 - 4A_4 z + 4A_2 A_4 - A_3^2 = 0$$

と書けるので、 $z = p + A_2/3$ とすると、

$$\begin{aligned} & \left(p + \frac{A_2}{3}\right)^3 - A_2 \left(p + \frac{A_2}{3}\right)^2 - 4A_4 \left(p + \frac{A_2}{3}\right) + 4A_2 A_4 - A_3^2 \\ &= \left(p^3 + A_2 p^2 + \frac{A_2^2}{3} p + \frac{A_2^3}{27}\right) - A_2 \left(p^2 + \frac{2A_2}{3} p + \frac{A_2^2}{9}\right) - 4A_4 p - \frac{4A_2 A_4}{3} \\ &\quad + 4A_2 A_4 - A_3^2 \\ &= p^3 + B_2 p + B_3 = 0 \end{aligned}$$

となり、 B_2, B_3 は

$$\begin{cases} B_2 = \frac{A_2^2}{3} - \frac{2A_2^2}{3} - 4A_4 = -\frac{A_2^2}{3} - 4A_4 \\ B_3 = \frac{A_2^3}{27} - \frac{A_2^3}{9} + \frac{8A_2 A_4}{3} - A_3^2 = -\frac{2}{27} A_2^3 + \frac{8}{3} A_2 A_4 - A_3^2 \end{cases}$$

となる。よって、最初に追加する累乗根は 5 節の (18), (19) より

$$J_1 = \sqrt{B_3^2 + \frac{4}{27} B_2^3}$$

と

$$J_2 = \sqrt[3]{\frac{-B_3 + J_1}{2}}, \quad J_2' = \sqrt[3]{\frac{-B_3 - J_1}{2}}$$

である。

次に追加するのは、(41) の解のひとつの z に対して (42) に現れる

$$J_3 = \sqrt{z - A_2} = \sqrt{J_2 + J'_2 + \frac{A_2}{3} - A_2} = \sqrt{J_2 + J'_2 - \frac{2A_2}{3}}$$

であり、そして最後に (42) の 2 本の 2 次方程式の判別式 $D_{3,\pm}$ の平方根である。(42) は、

$$t^2 \mp \sqrt{z - A_2} t + \frac{z}{2} \pm \frac{A_3}{2\sqrt{z - A_2}} = 0$$

なので、

$$D_{3,\pm} = z - A_2 - 2 \left(z \pm \frac{A_3}{\sqrt{z - A_2}} \right) = -z - A_2 \mp \frac{2A_3}{\sqrt{z - A_2}} \quad (43)$$

となり、その平方根

$$J_{4,\pm} = \sqrt{D_{3,\pm}}$$

が最後に追加する 2 つの平方根である。

まずは J_1 からだが、3 次の場合と同じように変数を一つ減らして $\bar{s}_j$ と $\bar{A}_k$ で考える。 $\bar{A}_k$ は既に (39) に示したし、命題 3 で $A_k = \bar{A}_k$ も示したので、 s_j と $\bar{s}_j$ の関係を見る必要はない (必要なら命題 2 で容易に得られる)。

まず、 B_2, B_3 を $\bar{s}_j$ で表す。なお、 J_1^2 を $\bar{A}_k$ で表してもあまり項は消えず、むしろその先が大変である。

$$\begin{aligned} B_2 &= -\frac{1}{3}\bar{A}_2^2 - 4\bar{A}_4 = -\frac{1}{3}\left(-\frac{3}{8}\bar{s}_1^2 + \bar{s}_2\right)^2 - 4\left(-\frac{3}{256}\bar{s}_1^4 + \frac{1}{16}\bar{s}_1^2\bar{s}_2 - \frac{1}{4}\bar{s}_1\bar{s}_3\right) \\ &= -\frac{1}{3}\left(\frac{9}{64}\bar{s}_1^4 - \frac{3}{4}\bar{s}_1^2\bar{s}_2 + \bar{s}_2^2\right) + \frac{3}{64}\bar{s}_1^4 - \frac{1}{4}\bar{s}_1^2\bar{s}_2 + \bar{s}_1\bar{s}_3 \\ &= -\frac{1}{3}\bar{s}_2^2 + \bar{s}_1\bar{s}_3, \\ B_3 &= -\frac{2}{27}\bar{A}_2^3 + \frac{8}{3}\bar{A}_2\bar{A}_4 - \bar{A}_3^2 \\ &= -\frac{2}{27}\left(-\frac{3}{8}\bar{s}_1^2 + \bar{s}_2\right)^3 + \frac{8}{3}\left(-\frac{3}{8}\bar{s}_1^2 + \bar{s}_2\right)\left(-\frac{3}{256}\bar{s}_1^4 + \frac{1}{16}\bar{s}_1^2\bar{s}_2 - \frac{1}{4}\bar{s}_1\bar{s}_3\right) \\ &\quad - \left(-\frac{1}{8}\bar{s}_1^3 + \frac{1}{2}\bar{s}_1\bar{s}_2 - \bar{s}_3\right)^2 \\ &= -\frac{2}{27}\left(-\frac{27}{29}\bar{s}_1^6 + \frac{27}{64}\bar{s}_1^4\bar{s}_2 - \frac{9}{8}\bar{s}_1^2\bar{s}_2^2 + \bar{s}_2^3\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{8}{3} \left(\frac{9}{2^{11}} \bar{s}_1^6 - \frac{9}{256} \bar{s}_1^4 \bar{s}_2 + \frac{1}{16} \bar{s}_1^2 \bar{s}_2^2 + \frac{3}{32} \bar{s}_1^3 \bar{s}_3 - \frac{1}{4} \bar{s}_1 \bar{s}_2 \bar{s}_3 \right) \\
& - \left(\frac{1}{64} \bar{s}_1^6 + \frac{1}{4} \bar{s}_1^2 \bar{s}_2^2 + \bar{s}_3^2 - \frac{1}{8} \bar{s}_1^4 \bar{s}_2 + \frac{1}{4} \bar{s}_1^3 \bar{s}_3 - \bar{s}_1 \bar{s}_2 \bar{s}_3 \right) \\
= & \bar{s}_1^6 \left(\frac{1}{2^8} + \frac{3}{2^8} - \frac{1}{64} \right) + \bar{s}_1^4 \bar{s}_2 \left(-\frac{1}{32} - \frac{3}{32} + \frac{1}{8} \right) + \bar{s}_1^2 \bar{s}_2^2 \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{6} - \frac{1}{4} \right) \\
& - \frac{2}{27} \bar{s}_2^3 + \bar{s}_1^3 \bar{s}_3 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right) + \bar{s}_1 \bar{s}_2 \bar{s}_3 \left(-\frac{2}{3} + 1 \right) - \bar{s}_3^2 \\
= & \frac{1}{3} \bar{s}_1 \bar{s}_2 \bar{s}_3 - \frac{2}{27} \bar{s}_2^3 - \bar{s}_3^2
\end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned}
J_1^2 &= B_3^2 + \frac{4}{27} B_2^3 \\
&= \left(\frac{1}{3} \bar{s}_1 \bar{s}_2 \bar{s}_3 - \frac{2}{27} \bar{s}_2^3 - \bar{s}_3^2 \right)^2 + \frac{4}{27} \left(-\frac{1}{3} \bar{s}_2^2 + \bar{s}_1 \bar{s}_3 \right)^3 \\
&= \frac{1}{9} \bar{s}_1^2 \bar{s}_2^2 \bar{s}_3^2 + \frac{4}{36} \bar{s}_2^6 + \bar{s}_3^4 - \frac{4}{81} \bar{s}_1 \bar{s}_2^4 \bar{s}_3 - \frac{2}{3} \bar{s}_1 \bar{s}_2 \bar{s}_3^3 + \frac{4}{27} \bar{s}_2^3 \bar{s}_3^2 \\
&\quad + \frac{4}{27} \left(-\frac{1}{27} \bar{s}_2^6 + \frac{1}{3} \bar{s}_1 \bar{s}_2^4 \bar{s}_3 - \bar{s}_1^2 \bar{s}_2^2 \bar{s}_3^2 + \bar{s}_1^3 \bar{s}_3^3 \right) \\
&= \bar{s}_1^2 \bar{s}_2^2 \bar{s}_3^2 \left(\frac{1}{9} - \frac{4}{27} \right) + \bar{s}_2^6 \left(\frac{4}{36} - \frac{4}{36} \right) + \bar{s}_3^4 + \bar{s}_1 \bar{s}_2^4 \bar{s}_3 \left(-\frac{4}{81} + \frac{4}{81} \right) - \frac{2}{3} \bar{s}_1 \bar{s}_2 \bar{s}_3^3 \\
&\quad + \frac{4}{27} \bar{s}_2^3 \bar{s}_3^2 + \frac{4}{27} \bar{s}_1^3 \bar{s}_3^3 \\
&= -\frac{1}{27} \bar{s}_1^2 \bar{s}_2^2 \bar{s}_3^2 + \bar{s}_3^4 - \frac{2}{3} \bar{s}_1 \bar{s}_2 \bar{s}_3^3 + \frac{4}{27} \bar{s}_2^3 \bar{s}_3^2 + \frac{4}{27} \bar{s}_1^3 \bar{s}_3^3
\end{aligned}$$

より、

$$J_1^2 = \bar{s}_3^2 H_1(\bar{s}_1, \bar{s}_2, \bar{s}_3), \quad H_1 = -\frac{1}{27} \bar{s}_1^2 \bar{s}_2^2 + \bar{s}_3^2 - \frac{2}{3} \bar{s}_1 \bar{s}_2 \bar{s}_3 + \frac{4}{27} \bar{s}_2^3 + \frac{4}{27} \bar{s}_1^3 \bar{s}_3 \quad (44)$$

と書ける。ここで、 H_1 は $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ の 6 次の対称式となる。

当然 J_1^2 も $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ の対称式であり、 x_1, x_2, x_3, x_4 の対称式でもあるが、それが

$$\bar{s}_3^2 = \bar{x}_1^2 \bar{x}_2^2 \bar{x}_3^2 = (x_1 - x_4)^2 (x_2 - x_4)^2 (x_3 - x_4)^2 \quad (45)$$

を因数に持つということは、 J_1^2 は x_j の置換をほどこしても不変なので、

$$(x_1 - x_2)^2 (x_1 - x_3)^2 (x_2 - x_3)^2 = (\bar{x}_1 - \bar{x}_2)^2 (\bar{x}_1 - \bar{x}_3)^2 (\bar{x}_2 - \bar{x}_3)^2 \quad (46)$$

も因数に持つということになる。実際、(45) に (2 4) の互換をほどこせば

$$(x_1 - x_2)^2(x_4 - x_2)^2(x_3 - x_2)^2$$

に変わるのので J_1^2 は $(x_1 - x_2)^2(x_2 - x_3)^2$ で割れ、さらに (2 3) の互換をほどこせば

$$(x_1 - x_3)^2(x_4 - x_3)^2(x_2 - x_3)^2$$

に変わるのので、 $(x_1 - x_3)^2$ でも割れるから、(46) で割れることになる。よって J_1^2 は (45), (46) の積である

$$P_4(x_1, x_2, x_3, x_4)^2 = (\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3)^2 P_3(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)^2 = \bar{s}_3^2 \bar{P}_3^2$$

で割れることになる。 $\bar{P}_3^2$ は 6 次の対称式なので、(44) より結局 H_1 は $\bar{P}_3^2$ の定数倍となり、その定数は、 $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ に具体的な値を代入すれば決定できる。例えば、 $\bar{x}_1 = 1, \bar{x}_2 = -1, \bar{x}_3 = 0$ とすると $\bar{s}_1 = 0, \bar{s}_2 = -1, \bar{s}_3 = 0$ となり、よって (44), (46) より

$$H_1 = -\frac{4}{27}, \quad \bar{P}_3^2 = 2^2 \cdot 1 \cdot 1 = 4$$

なので、 $H_1 = -\bar{P}_3^2/27$ となることがわかる。これにより、

$$J_1^2 = -\frac{1}{27} \bar{s}_3^2 \bar{P}_3^2 = -\frac{1}{27} P_4^2$$

となり、よって J_1 の平方根のひとつは

$$J_1 = \frac{\sqrt{3}i}{9} \bar{s}_3 \bar{P}_3 = \frac{\omega - \omega^2}{9} P_4 \quad (47)$$

となる。4 次の場合も、最初の累乗根 J_1 はやはり差積の定数倍であり、3 次の場合の (33) の I_1 とほぼ同等の式になっていることがわかる。

なお、 $H_1 = -\bar{P}_3^2/27$ は、この形を知った上でなら (44) を展開して直接示すこともできる。その計算は本節の最後に紹介する。

次は J_2^3 。

$$J_2^3 = \frac{1}{2}(-B_3 + J_1) = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{3} \bar{s}_1 \bar{s}_2 \bar{s}_3 + \frac{2}{27} \bar{s}_2^3 + \bar{s}_3^2 \right) + \frac{\sqrt{3}i}{18} \bar{s}_3 \bar{P}_3 \quad (48)$$

となる。ここで、この右辺を 3 乗の形に変形するために、3 項の 3 乗の展開について少し見ておく。3 次の対称式 S_j, Q_3 を

$$S_k = \sum_{j=1}^3 y_j^k, \quad Q_3 = \sum_{i,j=1}^3 y_i^2 y_j = y_1^2(y_2 + y_3) + y_2^2(y_3 + y_1) + y_3^2(y_1 + y_2)$$

と定めると、 $s_1(y_1, y_2, y_3) = y_1 + y_2 + y_3$ の 3 乗は、

$$\begin{cases} s_1^2 &= (y_1 + y_2 + y_3)^2 = S_2 + 2s_2, \\ s_1 S_2 &= (y_1 + y_2 + y_3)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) = S_3 + Q_3, \\ s_1 s_2 &= (y_1 + y_2 + y_3)(y_1 y_2 + y_1 y_3 + y_2 y_3) = Q_3 + 3s_3 \end{cases} \quad (49)$$

より、

$$s_1^3 = s_1(S_2 + 2s_2) = S_3 + Q_3 + 2(Q_3 + 3s_3) = S_3 + 3Q_3 + 6s_3 \quad (50)$$

となることがわかる。また、 $Q_3 = Q_3(y_1, y_2, y_3)$ は次の性質を持つことも容易にわかる。

$$\begin{cases} Q_3(ry_1, ry_2, ry_3) = r^3 Q_3(y_1, y_2, y_3) \\ Q_3(y_2 y_3, y_3 y_1, y_1 y_2) = y_1 y_2 y_3 Q_3(y_1, y_2, y_3) \end{cases} \quad (51)$$

さて J_2^3 の (48) の右辺の変形に戻る。(48) を

$$J_2^3 = \frac{1}{27} \left\{ \bar{s}_2^3 - \frac{9}{2} \bar{s}_3 (\bar{s}_1 \bar{s}_2 - 3\bar{s}_3) + \frac{3\sqrt{3}i}{2} \bar{s}_3 \bar{P}_3 \right\} \quad (52)$$

と変形すると、(52) のかっこ内の最初の 2 項は (49), (50), (51) より、

$$\begin{aligned} \bar{s}_2^3 - \frac{9}{2} \bar{s}_3 (\bar{s}_1 \bar{s}_2 - 3\bar{s}_3) &= (\bar{x}_1 \bar{x}_2 + \bar{x}_1 \bar{x}_3 + \bar{x}_2 \bar{x}_3)^3 - \frac{9}{2} \bar{s}_3 Q_3(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) \\ &= S_3(\bar{x}_1 \bar{x}_2, \bar{x}_1 \bar{x}_3, \bar{x}_2 \bar{x}_3) + 3Q_3(\bar{x}_1 \bar{x}_2, \bar{x}_1 \bar{x}_3, \bar{x}_2 \bar{x}_3) + 6\bar{x}_1^2 \bar{x}_2^2 \bar{x}_3^2 - \frac{9}{2} \bar{s}_3 Q_3(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) \\ &= S_3(\bar{x}_1 \bar{x}_2, \bar{x}_1 \bar{x}_3, \bar{x}_2 \bar{x}_3) - \frac{3}{2} \bar{s}_3 Q_3(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) + 6\bar{s}_3^2 \end{aligned}$$

となり、よって J_2^3 は

$$J_2^3 = \frac{1}{27} \left\{ S_3(\bar{x}_1 \bar{x}_2, \bar{x}_1 \bar{x}_3, \bar{x}_2 \bar{x}_3) + 6\bar{s}_3^2 + 3\bar{s}_3 \left(-\frac{1}{2} Q_3(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) + \frac{\sqrt{3}i}{2} \bar{P}_3 \right) \right\} \quad (53)$$

と書ける。ここで、

$$\begin{aligned}
 \bar{P}_3 &= (\bar{x}_1 - \bar{x}_2)(\bar{x}_1 - \bar{x}_3)(\bar{x}_2 - \bar{x}_3) \\
 &= \bar{x}_1^2\bar{x}_2 - \bar{x}_1^2\bar{x}_3 - \bar{x}_1\bar{x}_3\bar{x}_2 + \bar{x}_1\bar{x}_3^2 - \bar{x}_2^2\bar{x}_1 + \bar{x}_2\bar{x}_1\bar{x}_3 + \bar{x}_2^2\bar{x}_3 - \bar{x}_2\bar{x}_3^2 \\
 &= \bar{x}_1^2\bar{x}_2 + \bar{x}_2^2\bar{x}_3 + \bar{x}_3^2\bar{x}_1 - \bar{x}_1\bar{x}_2^2 - \bar{x}_2\bar{x}_3^2 - \bar{x}_3\bar{x}_1^2
 \end{aligned} \tag{54}$$

となるので、

$$\begin{aligned}
 &-\frac{1}{2}Q_3(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) + \frac{\sqrt{3}i}{2}\bar{P}_3 \\
 &= \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}(\bar{x}_1^2\bar{x}_2 + \bar{x}_2^2\bar{x}_3 + \bar{x}_3^2\bar{x}_1) + \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}(\bar{x}_1\bar{x}_2^2 + \bar{x}_2\bar{x}_3^2 + \bar{x}_3\bar{x}_1^2) \\
 &= \omega(\bar{x}_1^2\bar{x}_2 + \bar{x}_2^2\bar{x}_3 + \bar{x}_3^2\bar{x}_1) + \omega^2(\bar{x}_1\bar{x}_2^2 + \bar{x}_2\bar{x}_3^2 + \bar{x}_3\bar{x}_1^2) \\
 &= \bar{x}_1^2(\omega\bar{x}_2) + (\omega\bar{x}_2)^2(\omega^2\bar{x}_3) + (\omega^2\bar{x}_3)^2\bar{x}_1 + \bar{x}_1(\omega\bar{x}_2)^2 + (\omega\bar{x}_2)(\omega^2\bar{x}_3)^2 \\
 &\quad + (\omega^2\bar{x}_3)\bar{x}_1^2 \\
 &= Q_3(\bar{x}_1, \omega\bar{x}_2, \omega^2\bar{x}_3)
 \end{aligned}$$

と変形できる。また、(51) より、

$$\begin{aligned}
 \bar{s}_3 Q_3(\bar{x}_1, \omega\bar{x}_2, \omega^2\bar{x}_3) &= \bar{x}_1(\omega\bar{x}_2)(\omega^2\bar{x}_3)Q_3(\bar{x}_1, \omega\bar{x}_2, \omega^2\bar{x}_3) \\
 &= Q_3(\bar{x}_1(\omega\bar{x}_2), \bar{x}_1(\omega^2\bar{x}_3), (\omega\bar{x}_2)(\omega^2\bar{x}_3))
 \end{aligned}$$

となるので、(53) は、

$$\begin{aligned}
 J_2^3 &= \frac{1}{27} \left\{ S_3(\bar{x}_1\bar{x}_2, \bar{x}_1\bar{x}_3, \bar{x}_2\bar{x}_3) + 6\bar{s}_3^2 + 3\bar{s}_3 Q_3(\bar{x}_1, \omega\bar{x}_2, \omega^2\bar{x}_3) \right\} \\
 &= \frac{1}{27} \left\{ S_3(\bar{x}_1(\omega\bar{x}_2), \bar{x}_1(\omega^2\bar{x}_3), (\omega\bar{x}_2)(\omega^2\bar{x}_3)) \right. \\
 &\quad \left. + 3Q_3(\bar{x}_1(\omega\bar{x}_2), \bar{x}_1(\omega^2\bar{x}_3), (\omega\bar{x}_2)(\omega^2\bar{x}_3)) + 6\bar{x}_1^2(\omega\bar{x}_2)^2(\omega^2\bar{x}_3)^2 \right\} \\
 &= \left\{ \frac{1}{3}(\omega\bar{x}_1\bar{x}_2 + \omega^2\bar{x}_1\bar{x}_3 + \omega^3\bar{x}_2\bar{x}_3) \right\}^3 = \left\{ \frac{1}{3}(\bar{x}_1\bar{x}_2 + \omega\bar{x}_1\bar{x}_3 + \omega^2\bar{x}_2\bar{x}_3) \right\}^3
 \end{aligned}$$

となり、よってその 3 乗根の一つは

$$J_2 = \frac{1}{3}(\bar{x}_1\bar{x}_2 + \omega\bar{x}_1\bar{x}_3 + \omega^2\bar{x}_2\bar{x}_3)$$

となる。 x_j で表すと、

$$\bar{x}_1\bar{x}_2 + \omega\bar{x}_1\bar{x}_3 + \omega^2\bar{x}_2\bar{x}_3$$

$$\begin{aligned}
&= (x_1 - x_4)(x_2 - x_4) + \omega(x_1 - x_4)(x_3 - x_4) + \omega^2(x_2 - x_4)(x_3 - x_4) \\
&= x_1x_2 - x_4(x_1 + x_2) + x_4^2 + \omega\{x_1x_3 - x_4(x_1 + x_3) + x_4^2\} \\
&\quad + \omega^2\{x_2x_3 - x_4(x_2 + x_3) + x_4^2\} \\
&= x_1x_2 + \omega x_1x_3 + \omega^2 x_2x_3 - x_4\{(1 + \omega)x_1 + (1 + \omega^2)x_2 + (\omega + \omega^2)x_3\} \\
&\quad + x_4^2(1 + \omega + \omega^2) \\
&= x_1x_2 + \omega x_1x_3 + \omega^2 x_2x_3 - x_4(-\omega^2 x_1 - \omega x_2 - x_3) \\
&= x_1x_2 + x_3x_4 + \omega(x_1x_3 + x_2x_4) + \omega^2(x_1x_4 + x_2x_3)
\end{aligned}$$

より

$$J_2 = \frac{1}{3}\{x_1x_2 + x_3x_4 + \omega(x_1x_3 + x_2x_4) + \omega^2(x_1x_4 + x_2x_3)\}$$

となる。

また、 J_1 を $-J_1$ にした場合の J_2 は、係数が共役になるので、

$$\begin{aligned}
J'_2 &= \frac{1}{3}(\bar{x}_1\bar{x}_2 + \omega^2\bar{x}_1\bar{x}_3 + \omega\bar{x}_2\bar{x}_3) \\
&= \frac{1}{3}\{x_1x_2 + x_3x_4 + \omega^2(x_1x_3 + x_2x_4) + \omega(x_1x_4 + x_2x_3)\}
\end{aligned}$$

となる。この J_2 と J'_2 の和で z が構成される。

次は $J_3 = \sqrt{z - A_2}$ 。 z は、 $z = J_2 + J'_2 + A_2/3$ だが、

$$\begin{aligned}
J_2 + J'_2 &= \frac{1}{3}(\bar{x}_1\bar{x}_2 + \omega\bar{x}_1\bar{x}_3 + \omega^2\bar{x}_2\bar{x}_3) + \frac{1}{3}(\bar{x}_1\bar{x}_2 + \omega^2\bar{x}_1\bar{x}_3 + \omega\bar{x}_2\bar{x}_3) \\
&= \frac{1}{3}(2\bar{x}_1\bar{x}_2 - \bar{x}_1\bar{x}_3 - \bar{x}_2\bar{x}_3), \\
A_2 &= -\frac{3}{8}\bar{s}_1^2 + \bar{s}_2 = -\frac{3}{8}(\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3)^2 + \bar{x}_1\bar{x}_2 + \bar{x}_1\bar{x}_3 + \bar{x}_2\bar{x}_3 \\
&= -\frac{3}{8}(\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2 + \bar{x}_3^2) + \frac{1}{4}(\bar{x}_1\bar{x}_2 + \bar{x}_1\bar{x}_3 + \bar{x}_2\bar{x}_3)
\end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned}
J_3^2 &= z - A_2 = J_2 + J'_2 + \frac{A_2}{3} - A_2 = J_2 + J'_2 - \frac{2}{3}A_2 \\
&= \frac{1}{3}(2\bar{x}_1\bar{x}_2 - \bar{x}_1\bar{x}_3 - \bar{x}_2\bar{x}_3) + \frac{1}{4}(\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2 + \bar{x}_3^2) - \frac{1}{6}(\bar{x}_1\bar{x}_2 + \bar{x}_1\bar{x}_3 + \bar{x}_2\bar{x}_3) \\
&= \frac{1}{4}(\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2 + \bar{x}_3^2) + \frac{1}{6}(3\bar{x}_1\bar{x}_2 - 3\bar{x}_1\bar{x}_3 - 3\bar{x}_2\bar{x}_3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4}(\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2 + \bar{x}_3^2 + 2\bar{x}_1\bar{x}_2 - 2\bar{x}_1\bar{x}_3 - 2\bar{x}_2\bar{x}_3) \\
&= \left\{ \frac{1}{2}(\bar{x}_1 + \bar{x}_2 - \bar{x}_3) \right\}^2
\end{aligned}$$

となるので、 J_3 の平方根の一つは、

$$J_3 = \frac{1}{2}(\bar{x}_1 + \bar{x}_2 - \bar{x}_3) \quad (55)$$

となる。

最後は $J_{4,\pm} = \sqrt{D_{3,\pm}}$ 。(43) より、

$$\begin{aligned}
J_{4,\pm}^2 &= D_{3,\pm} = -z - A_2 \mp \frac{2A_3}{\sqrt{z - A_2}} = -\left(J_2 + J_2' + \frac{A_2}{3}\right) - A_2 \mp \frac{2A_3}{J_3} \\
&= \frac{1}{3}(-2\bar{x}_1\bar{x}_2 + \bar{x}_1\bar{x}_3 + \bar{x}_2\bar{x}_3) - \frac{4}{3}\left(-\frac{3}{8}\bar{s}_1^2 + \bar{s}_2\right) \mp \frac{2A_3}{J_3} \\
&= \frac{1}{3}(-2\bar{x}_1\bar{x}_2 + \bar{x}_1\bar{x}_3 + \bar{x}_2\bar{x}_3) + \frac{1}{2}(\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3)^2 - \frac{4}{3}\bar{s}_2 \mp \frac{2A_3}{J_3} \\
&= \frac{1}{3}(-2\bar{x}_1\bar{x}_2 + \bar{x}_1\bar{x}_3 + \bar{x}_2\bar{x}_3) + \frac{1}{2}(\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2 + \bar{x}_3^2) - \frac{1}{3}\bar{s}_2 \mp \frac{2A_3}{J_3} \\
&= \frac{1}{2}(\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2 + \bar{x}_3^2) - \bar{x}_1\bar{x}_2 \mp \frac{2A_3}{J_3}
\end{aligned}$$

なので

$$J_{4,\pm}^2 = \frac{1}{2}\{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)^2 + \bar{x}_3^2\} \mp \frac{2A_3}{J_3} \quad (56)$$

と書ける。この最後の項であるが、これは約分ができる。(49), (50) より A_3 は

$$\begin{aligned}
A_3 &= -\frac{1}{8}\bar{s}_1^3 + \frac{1}{2}\bar{s}_1\bar{s}_2 - \bar{s}_3 = -\frac{1}{8}\{(\bar{x}_1 + \bar{x}_3 + \bar{x}_3)^3 - 4\bar{s}_1\bar{s}_2 + 8\bar{s}_3\} \\
&= -\frac{1}{8}(\bar{S}_3 + 3\bar{Q}_3 + 6\bar{s}_3 - 4\bar{Q}_3 - 12\bar{s}_3 + 8\bar{s}_3) = -\frac{1}{8}(\bar{S}_3 - \bar{Q}_3 + 2\bar{s}_3) \\
&= -\frac{1}{8}\{\bar{x}_1^3 + \bar{x}_2^3 + \bar{x}_3^3 - \bar{x}_1^2(\bar{x}_2 + \bar{x}_3) - \bar{x}_1(\bar{x}_2^2 + \bar{x}_3^2) - \bar{x}_2\bar{x}_3(\bar{x}_2 + \bar{x}_3) + 2\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\} \\
&= -\frac{1}{8}\{\bar{x}_1^3 - \bar{x}_1^2(\bar{x}_2 + \bar{x}_3) - \bar{x}_1(\bar{x}_2^2 + \bar{x}_3^2 - 2\bar{x}_2\bar{x}_3) + (\bar{x}_2 + \bar{x}_3)(\bar{x}_2^2 - 2\bar{x}_2\bar{x}_3 + \bar{x}_3^2)\} \\
&= -\frac{1}{8}\{\bar{x}_1^2(\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - \bar{x}_3) + (\bar{x}_2 + \bar{x}_3 - \bar{x}_1)(\bar{x}_2 - \bar{x}_3)^2\} \\
&= -\frac{1}{8}(\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - \bar{x}_3)\{\bar{x}_1^2 - (\bar{x}_2 - \bar{x}_3)^2\} \\
&= -\frac{1}{8}(\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - \bar{x}_3)(\bar{x}_1 + \bar{x}_2 - \bar{x}_3)(\bar{x}_1 - \bar{x}_2 + \bar{x}_3)
\end{aligned}$$

と因数分解できるので、(55) より

$$\begin{aligned}\frac{2A_3}{J_3} &= -\frac{1}{2} \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - \bar{x}_3)(\bar{x}_1 + \bar{x}_2 - \bar{x}_3)(\bar{x}_1 - \bar{x}_2 + \bar{x}_3)}{\bar{x}_1 + \bar{x}_2 - \bar{x}_3} \\ &= -\frac{1}{2}(\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - \bar{x}_3)(\bar{x}_1 - \bar{x}_2 + \bar{x}_3) = -\frac{1}{2}\{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)^2 - \bar{x}_3^2\}\end{aligned}$$

と約分できる。これにより (56) は、

$$J_{4,\pm}^2 = \frac{1}{2}\{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)^2 + \bar{x}_3^2\} \pm \frac{1}{2}\{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)^2 - \bar{x}_3^2\} = (\bar{x}_1 - \bar{x}_2)^2, \bar{x}_3^2$$

となり、よって $J_{4,\pm}$ の平方根の一つは、それぞれ

$$J_{4,+} = \bar{x}_1 - \bar{x}_2 = x_1 - x_2, \quad J_{4,-} = \bar{x}_3 = x_3 - x_4$$

となることがわかる。以上をまとめると、4 次方程式の解の公式の累乗根は

$$\left\{ \begin{array}{l} J_1 = \frac{\omega - \omega^2}{9} \bar{s}_3 \bar{P}_3 = \frac{\omega - \omega^2}{9} P_4 \\ J_2 = \frac{1}{3}(\bar{x}_1 \bar{x}_2 + \omega \bar{x}_1 \bar{x}_3 + \omega^2 \bar{x}_2 \bar{x}_3) \\ \quad = \frac{1}{3}\{(x_1 x_2 + x_3 x_4) + \omega(x_1 x_3 + x_2 x_4) + \omega^2(x_1 x_4 + x_2 x_3)\} \\ J'_2 = \frac{1}{3}(\bar{x}_1 \bar{x}_2 + \omega^2 \bar{x}_1 \bar{x}_3 + \omega \bar{x}_2 \bar{x}_3) \\ \quad = \frac{1}{3}\{(x_1 x_2 + x_3 x_4) + \omega^2(x_1 x_3 + x_2 x_4) + \omega(x_1 x_4 + x_2 x_3)\} \\ J_3 = \frac{1}{2}(\bar{x}_1 + \bar{x}_2 - \bar{x}_3) = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 - x_3 - x_4) \\ J_{4,+} = \bar{x}_1 - \bar{x}_2 = x_1 - x_2 \\ J_{4,-} = \bar{x}_3 = x_3 - x_4 \end{array} \right.$$

となる。

逆にこれらの式と係数 s_j から解を表すのは容易で、 s_1 と J_3 を使えば、

$$\frac{1}{2}s_1 + J_3 = x_1 + x_2, \quad \frac{1}{2}s_1 - J_3 = x_3 + x_4$$

であるから、 $J_{4,\pm}$ によって

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} s_1 + J_3 + J_{4,+} \right) = \frac{s_1}{4} + \frac{J_3 + J_{4,+}}{2} \\ x_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} s_1 + J_3 - J_{4,+} \right) = \frac{s_1}{4} + \frac{J_3 - J_{4,+}}{2} \\ x_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} s_1 - J_3 + J_{4,-} \right) = \frac{s_1}{4} + \frac{-J_3 + J_{4,-}}{2} \\ x_4 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} s_1 - J_3 - J_{4,-} \right) = \frac{s_1}{4} + \frac{-J_3 - J_{4,-}}{2} \end{cases}$$

となる。この右辺は丁度フェラーリの解と同じものになっている。

最後に、(47) の後に書いた、(44) の H_1 が $-\bar{P}_3^2/27$ に等しいことを直接展開することにより示す。まず、(54) の最初の $+$ の 3 つの項の和を $\bar{R}_3$ 、後の $-$ の 3 つの項の和を $-\bar{T}_3$ とすると、

$$\bar{P}_3 = \bar{R}_3 - \bar{T}_3, \quad \bar{Q}_3 = \bar{R}_3 + \bar{T}_3 \quad (57)$$

であることがわかる。一方、 $\hat{S}_3 = S_3(\bar{x}_1\bar{x}_2, \bar{x}_1\bar{x}_3, \bar{x}_2\bar{x}_3)$ とすると、

$$\begin{aligned} \bar{R}_3\bar{T}_3 &= (\bar{x}_1^2\bar{x}_2 + \bar{x}_2^2\bar{x}_3 + \bar{x}_3^2\bar{x}_1)(\bar{x}_1\bar{x}_2^2 + \bar{x}_2\bar{x}_3^2 + \bar{x}_3\bar{x}_1^2) \\ &= (\bar{x}_1^3\bar{x}_2^3 + \bar{x}_1^2\bar{x}_2^2\bar{x}_3^2 + \bar{x}_1^4\bar{x}_2\bar{x}_3) + (\bar{x}_2^3\bar{x}_3^3 + \bar{x}_1^2\bar{x}_2^2\bar{x}_3^2 + \bar{x}_1\bar{x}_2^4\bar{x}_3) \\ &\quad + (\bar{x}_1^3\bar{x}_3^3 + \bar{x}_1^2\bar{x}_2^2\bar{x}_3^2 + \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3^4) \end{aligned}$$

より

$$\bar{R}_3\bar{T}_3 = \hat{S}_3 + 3\bar{s}_3^2 + \bar{s}_3\bar{S}_3 \quad (58)$$

となる。よって、(44) は (50), (51) より

$$\begin{aligned} -27H_1 &= \bar{s}_1^2\bar{s}_2^2 - 27\bar{s}_3^2 + 18\bar{s}_1\bar{s}_2\bar{s}_3 - 4\bar{s}_2^3 - 4\bar{s}_1^3\bar{s}_3 \\ &= -27\bar{s}_3^2 + \bar{s}_3(18\bar{s}_1\bar{s}_2 - 4\bar{s}_1^3) + \bar{s}_1^2\bar{s}_2^2 - 4\bar{s}_2^3 \\ &= -27\bar{s}_3^2 + \bar{s}_3\{18\bar{Q}_3 + 54\bar{s}_3 - 4(\bar{S}_3 + 3\bar{Q}_3 + 6\bar{s}_3)\} + (\bar{Q}_3 + 3\bar{s}_3)^2 \\ &\quad - 4\{\hat{S}_3 + 3\bar{Q}_3(\bar{x}_1\bar{x}_2, \bar{x}_1\bar{x}_3, \bar{x}_2\bar{x}_3) + 6\bar{s}_3^2\} \\ &= -27\bar{s}_3^2 + (-4\bar{s}_3\bar{S}_3 + 6\bar{s}_3\bar{Q}_3 + 30\bar{s}_3^2) + (\bar{Q}_3^2 + 6\bar{s}_3\bar{Q}_3 + 9\bar{s}_3^2) \\ &\quad - (4\hat{S}_3 + 12\bar{s}_3\bar{Q}_3 + 24\bar{s}_3^2) \\ &= \bar{Q}_3^2 - 4\hat{S}_3 - 4\bar{s}_3\bar{S}_3 - 12\bar{s}_3^2 = \bar{Q}_3^2 - 4(\hat{S}_3 + \bar{s}_3\bar{S}_3 + 3\bar{s}_3^2) \end{aligned}$$

となるので、(57), (58) より、

$$-27H_1 = (\bar{R}_3 + \bar{T}_3)^2 - 4\bar{R}_3\bar{T}_3 = (\bar{R}_3 - \bar{T}_3)^2 = \bar{P}_3^2$$

となることがわかる。

8 最後に

本稿では、アーベルの定理に関係する個人的な疑問に対する計算を紹介した。

解の公式の累乗根は、本来は根 $x_1, \dots, x_n$ の対称式である a_j から対称式ではない有理式を作っていて、それによって対称式ではない x_j を累乗根と係数である対称式で表すのが解の公式なのであるが、本稿のようにその累乗根を根の有理式で表してみるとその仕組みが見えてくる。

また、本稿では累乗根を $\bar{s}_j$ で表し、そこに $\bar{x}_j$ を代入して展開するといったような計算を示したが、単に最終的な有理式を得るだけなら実は逆から始める方が簡単で、例えば 3 次式ならカルダノの公式 (37) から (36) を導けば I_2, I_2' の有理式 (1 次式) が得られ、そして I_1 の有理式は、(19) より $I_1 = 2I_2^3 + A_3$ により得ることができる。

しかし、やはりそれだと (少なくとも私には) あまりわかったような気にはならないので、本稿ではあえて正面から面倒な計算をやってみた。よって、それほど意味のある計算ではないが、あまりこういう泥臭い計算を目にすることはないので、全く無意味というわけでもないかなと思う。

参考文献

- [1] アルティン (寺田文行訳)、「ガロア理論」、東京図書 (1974)
- [2] 高木貞治、「代数学講義 改訂新版」、共立出版 (1965)
- [3] 中学でもわかる浪漫数学、「5 次方程式になぜ解の公式が存在しないのか？」
<https://note.com/suurijuku/m/mba1ec5df3a54>
- [4] 志賀浩二、「方程式」(数学が育っていく物語 第 5 週)、岩波書店 (1994)