◎準備

函数 $p_1(x), p_2(x), \cdots, p_m(x)$ に対し

1. $p_1, p_2, \cdots, p_m$ の 線形結合（又は重ね合わせ）

$= a_1p_1(x) + a_2p_2(x) + \cdots + a_mp_m(x)$ の形の式 （a_j：定数）

2. $p_1, p_2, \cdots, p_m$ が 線形従属

= どれかひとつが，他のものの線形結合となる ← 1次的な関係がある

3. $p_1, p_2, \cdots, p_m$ が 線形独立

= 線形従属ではない。 ← 1次的な関係がない

命題2. $p_1(x), p_2(x), \cdots, p_m(x)$ が線形従属

$\Leftrightarrow$（同値） $a_1p_1(x) + a_2p_2(x) + \cdots + a_mp_m(x) \equiv 0$ ← 考えている範囲のすべての x に対して

で，かつ $(a_1, a_2, \cdots, a_m) \neq (0, 0, \cdots, 0)$ ← 「全部0」ではない

であるような実数 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ が存在する

命題3 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)$ が D上線形独立で

D上 $g(x) \neq 0$ $\Rightarrow$ $f_1(x)g(x), f_2(x)g(x), \cdots, f_n(x)g(x)$ も D上線形独立

命題4 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)$ が線形独立で

$a_1f_1(x) + a_2f_2(x) + \cdots + a_nf_n(x) \equiv b_1f_1(x) + b_2f_2(x) + \cdots + b_nf_n(x)$

（a_j, b_j：定数）

$\Rightarrow$ すべての j に対して $a_j = b_j$

（恒等式の係数比較の原理

命題5 $p_1(x), p_2(x), \cdots, p_n(x)$ に対し，函数行列式

$$W(p_1, p_2, \cdots, p_n)(x) = \begin{vmatrix} p_1(x) & p_2(x) & \cdots & p_n(x) \\ p_1'(x) & p_2'(x) & \cdots & p_n'(x) \\ \vdots & & & \\ p_1^{(n-1)}(x) & p_2^{(n-1)}(x) & \cdots & p_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

の値が 0 でないような x が存在すれば $p_1, p_2, \cdots, p_n$ は線形独立 （逆は成り立たない）

斉 $y^{(n)} + f_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + f_1(x)y' + f_0(x)y = 0$ （斉次）

非斉 〃 〃 〃 〃 $= g(x)$ （非斉次）

定理6

1. 斉の解の線形結合は斉の解（斉の重ね合わせの原理）

2. 斉は n 個の線形独立な解 $\phi_1(x), \phi_2(x), \cdots \phi_n(x)$ を持つ。

（$\{\phi_1(x), \phi_2(x), \cdots, \phi_n(x)\}$ を基本解系と呼ぶ…） 一意ではない

3. （斉の一般解）$= C_1\phi_1(x) + C_2\phi_2(x) + \cdots + C_n\phi_n(x)$ （C_j：任意定数）

4. （非斉の一般解）=（非斉の特殊解）+（斉の一般解）

$= y_0(x) + C_1\phi_1(x) + C_2\phi_2(x) + \cdots + C_n\phi_n(x)$

命題7 斉の n 個の解 $\psi_1(x), \psi_2(x), \cdots, \psi_n(x)$ に対しては

$W(\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_n)(x)$ の値は (1) すべての x に対して 0 でない

(2) すべての x に対して 0，のいずれかとなり

(1) $\Rightarrow$ $\{\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_n\}$ は基本解系 ← 命題5，定理6.3.

(2) $\Rightarrow$ 〃 は線形従属 ← 自明ではない

← 基本解にはいくつか足りない