2004 年 2 月 26 日

3 次元のアフィン行列を求める問題について

新潟工科大学 情報電子工学科 竹野茂治

1 はじめに

以前機械系の方と、3 次元の合同アフィン変換 (回転 + 平行移動からなる合同変換) の、回転と平行移動を求める方法に関して話を聞いたことがあり、その方法が多少面白い方法であったので、ここにまとめておく。

2 アフィン変換と回転行列

3 次元空間内のアフィン変換とは、

$$P(x_1,x_2,x_3)\mapsto Q(y_1,y_2,y_3)$$

が、以下のように一つの行列 A とベクトル $\boldsymbol{b}$ によって表される変換のことである:

$$\boldsymbol{q}=A\boldsymbol{p}+\boldsymbol{b}\quad(\boldsymbol{q}=\vec{OQ},\ \boldsymbol{p}=\vec{OP})\tag{1}$$

$\boldsymbol{b}$ は平行移動を表し、行列 A が一次変換を意味しているが、ここでは形を変えない合同変換 (回転 + 平行移動) を考えることにする。

この変換によって、座標軸方向の単位ベクトル

$$\boldsymbol{e_1}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{e_2}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{e_3}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

は、新たな互いに直交する単位ベクトルに写るはずであるが、それらをそれぞれ $\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2}$, $\boldsymbol{a_3}$ とすると、例えば $\boldsymbol{a_1}$ は

$$\boldsymbol{a_1}=A\boldsymbol{e_1}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}\\a_{21}\\a_{31}\end{bmatrix}$$

のようになり、結局 $A=\begin{bmatrix}a_1&a_2&a_3\end{bmatrix}$ であることがわかる。

ここで、$\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ (内積) に等しいことを利用して、この行列 A に関して A^TA (A^T は A の転置) を計算してみると、

$$A^TA=\begin{bmatrix}{a_1}^T\\{a_2}^T\\{a_3}^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1&a_2&a_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1\cdot a_1&a_1\cdot a_2&a_1\cdot a_3\\a_2\cdot a_1&a_2\cdot a_2&a_2\cdot a_3\\a_3\cdot a_1&a_3\cdot a_2&a_3\cdot a_3\end{bmatrix}$$

となるが、$\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2}$, $\boldsymbol{a_3}$ は互いに直交する単位ベクトルであるから、結局 $A^TA = E$ (単位行列) となる。

このように、$A^TA = E$、すなわち転置行列が逆行列となるような実行列は、**直交行列** と呼ばれているが、逆に、直交行列の列ベクトルは上の計算からもわかるように互いに直交する単位ベクトルとなっている。すなわち、合同変換を表す行列 A は直交行列であることがわかる。

また、直交行列は

$$|A^TA| = |A^T||A| = |A|^2 = |E| = 1$$

よりその行列式の値は ± 1 となるが、行列式の値が負の場合 $\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2}$, $\boldsymbol{a_3}$ は左手系をなす。よって、回転を表す行列の場合は行列式の値が 1 の直交行列のみを扱うのが普通である (-1 の方は反転が入る)。

回転を表す行列は、さらに各軸の周りの回転角を用いて、3 つのパラメータ (角度) の正弦、余弦の値を使って表されるようであり、詳しくは知らないのでここではそれは省略するが、回転を表す行列が与えられれば、それらの角は一意に決定することができるようである。

また、A による変換が本当に原点の周りの回転を表しているのか、ということに関しては、一次変換の性質を次のように見れば多少納得できるだろう。3 次元空間の任意の点 $P(x_1, x_2, x_3)$ が、A によって $Q(y_1, y_2, y_3)$ に写ったとすると、それらは $\boldsymbol{q} = A\boldsymbol{p}$ の関係にあるが、ここで、

$$\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = x_1\boldsymbol{e_1} + x_2\boldsymbol{e_2} + x_3\boldsymbol{e_3}$$

と考えれば、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{q} &= A\boldsymbol{p} = A(x_1\boldsymbol{e_1} + x_2\boldsymbol{e_2} + x_3\boldsymbol{e_3}) = x_1A\boldsymbol{e_1} + x_2A\boldsymbol{e_2} + x_3A\boldsymbol{e_3} \\ &= x_1\boldsymbol{a_1} + x_2\boldsymbol{a_2} + x_3\boldsymbol{a_3} \end{aligned}$$

となる。

この式は、$\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2}$, $\boldsymbol{a_3}$ をあらたな座標軸として点 Q を見ると、その成分は x_1, x_2, x_3 であり、それは、元の座標系での点 P の成分に等しい、ということを意味している。つまり、A による変換は、座標軸が $\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2}$, $\boldsymbol{a_3}$ に合わせて方向を変えた分だけ P も動く、そういう変換である、ということを意味することになる。

3 3 点から合同アフィン変換を決定

私が聞いた、合同アフィン変換 (1) を決定する方法は以下のような方法であった。

1. 空間内の 3 点 P_1, P_2, P_3 を、それらが三角形を作るように取る (一直線上には取らない)
2. それらのアフィン変換 (1) による像 Q_1, Q_2, Q_3 を決め、そのようなアフィン変換を求める (具体的には回転行列 A とベクトル $\boldsymbol{b}$ の成分を求める) ことを考える

3. 以下のようにベクトル $\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{x_3}$ と $\boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{y_2}, \boldsymbol{y_3}$ を決める

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{x_1} = \overrightarrow{P_1P_2}, \quad \boldsymbol{x_2} = \overrightarrow{P_1P_3}, \quad \boldsymbol{x_3} = \boldsymbol{x_1} \times \boldsymbol{x_2}, \\
&\boldsymbol{y_1} = \overrightarrow{Q_1Q_2}, \quad \boldsymbol{y_2} = \overrightarrow{Q_1Q_3}, \quad \boldsymbol{y_3} = \boldsymbol{y_1} \times \boldsymbol{y_2}
\end{aligned}$$

4. すると、$X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix}$ に対して

$$Y = AX$$

が成り立つので、両辺 X^{-1} をかけて $A = YX^{-1}$ により A が求まり、$\boldsymbol{b}$ は式 (1) より

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{q_1} - A\boldsymbol{p_1}$$

により求まる

方法は以上の通りであるが、しかしこれらの操作は必ずしも自明ではない部分を含んでいる。

例えば $\boldsymbol{x_1} = \boldsymbol{p_2} - \boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{y_1} = \boldsymbol{q_2} - \boldsymbol{q_1}$ より、

$$\boldsymbol{y_1} = \boldsymbol{q_2} - \boldsymbol{q_1} = (A\boldsymbol{p_2} + \boldsymbol{b}) - (A\boldsymbol{p_1} - \boldsymbol{b}) = A(\boldsymbol{p_2} - \boldsymbol{p_1}) = A\boldsymbol{x_1}$$

となり、同様にして $\boldsymbol{y_2} = A\boldsymbol{x_2}$ が成り立つことも分かるので $\boldsymbol{y_3} = A\boldsymbol{x_3}$ が成り立てば確かに $Y = AX$、すなわち

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}$$

となるが、この $\boldsymbol{y_3} = A\boldsymbol{x_3}$、すなわち $(A\boldsymbol{x_1}) \times (A\boldsymbol{x_2}) = A(\boldsymbol{x_1} \times \boldsymbol{x_2})$ は明らかではないし、例えば一般の行列 A に対して成り立つ式ではない。

しかし、これは A が回転行列の場合は成立する。

定理 1

A が直交行列で、$|A| = 1$ の場合、$\boldsymbol{y_1} = A\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{y_2} = A\boldsymbol{x_2}$ に対して

$$\boldsymbol{y_1} \times \boldsymbol{y_2} = (A\boldsymbol{x_1}) \times (A\boldsymbol{x_2}) = A(\boldsymbol{x_1} \times \boldsymbol{x_2})$$

が成立する。

証明

A が直交行列、すなわち $A^TA = E$ である場合、$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix}$ の a_j は互いに直交する単位ベクトルとなる。また、$|A| = 1$ より $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3}$ はこの順に右手系となる。よって、以下が成り立つ。

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{a_1} \times \boldsymbol{a_2} = \boldsymbol{a_3}, \quad &&\boldsymbol{a_2} \times \boldsymbol{a_3} = \boldsymbol{a_1}, \quad &&\boldsymbol{a_3} \times \boldsymbol{a_1} = \boldsymbol{a_2} \\
&\boldsymbol{a_2} \times \boldsymbol{a_1} = -\boldsymbol{a_3}, \quad &&\boldsymbol{a_3} \times \boldsymbol{a_2} = -\boldsymbol{a_1}, \quad &&\boldsymbol{a_1} \times \boldsymbol{a_3} = -\boldsymbol{a_2} \\
&\boldsymbol{a_1} \times \boldsymbol{a_1} = \boldsymbol{0}, \quad &&\boldsymbol{a_2} \times \boldsymbol{a_2} = \boldsymbol{0}, \quad &&\boldsymbol{a_3} \times \boldsymbol{a_3} = \boldsymbol{0}
\end{aligned}$$

となる。

今、$\boldsymbol{x_j}$ の各成分を $\boldsymbol{x_j} = (x_1^j, x_2^j, x_3^j)^T$ $(j = 1, 2)$ と書くことにすると、

$$\boldsymbol{y_j} = A\boldsymbol{x_j} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^j \\ x_2^j \\ x_3^j \end{bmatrix} = x_1^j \boldsymbol{a_1} + x_2^j \boldsymbol{a_2} + x_3^j \boldsymbol{a_3}$$

となるので、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y_1} \times \boldsymbol{y_2} &= (A\boldsymbol{x_1}) \times (A\boldsymbol{x_2}) = (x_1^1 \boldsymbol{a_1} + x_2^1 \boldsymbol{a_2} + x_3^1 \boldsymbol{a_3}) \times (x_1^2 \boldsymbol{a_1} + x_2^2 \boldsymbol{a_2} + x_3^2 \boldsymbol{a_3}) \\ &= (x_2^1 x_3^2 - x_3^1 x_2^2)\boldsymbol{a_1} + (x_3^1 x_1^2 - x_1^1 x_3^2)\boldsymbol{a_2} + (x_1^1 x_2^2 - x_2^1 x_1^2)\boldsymbol{a_3} \\ &= \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2^1 x_3^2 - x_3^1 x_2^2 \\ x_3^1 x_1^2 - x_1^1 x_3^2 \\ x_1^1 x_2^2 - x_2^1 x_1^2 \end{bmatrix} \\ &= A(\boldsymbol{x_1} \times \boldsymbol{x_2}) \end{aligned}$$

となる。■

A が求まれば、そこから平行移動成分 $\boldsymbol{b}$ を求めるのは易しい。

4 最後に

前節で述べたような操作は、その分野では当り前のように使われている事実らしいが、必ずしも自明ではなく、数学的に興味を持ったので少しまとめてみた。

A が回転行列の場合、$\boldsymbol{x_1} \times \boldsymbol{x_2}$ も同じだけ回転されるはずなので、前節で述べた定理が成り立つのもそう考えれば当然のようにも思えるが、普段線形代数では n 次元で普遍的に成立する定理を扱うので、あまり 3 次元特有の定理については考察をする機会は、3 次元を扱っている幾何学者はそうでもないのかもしれないが、少なくとも私にはほとんどない。

そのためか、このような事実を利用するという発想や、2 つの一次独立なベクトルから外積を作って一つ線形独立なベクトルを増やしたりすることが、3 次元を対象とする工学分野らしい独特の手法でとても目新しく感じられて興味深かった。

普段、抽象的すぎてあまり親しみの感じやすくない線形代数の講義の教材として利用するのも面白いかも知れない。