2021 年 09 月 10 日

# 行列の積について

新潟工科大学 基礎教育・教養系 竹野茂治

## 1 はじめに

行列の積は、$m\times n$ 行列 $A=[a_{ij}]_{m,n}$ と $n\times p$ 行列 $B=[b_{ij}]_{n,p}$ に対して、

$$AB=[c_{ij}]_{m,p},\quad c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj} \tag{1}$$

となる $m\times p$ 行列 $[c_{ij}]_{m,p}$ として定義される。

つまり $A$ の行ベクトルと、$B$ の列ベクトルの内積のような計算をそのすべての組に対して行って積 $AB$ の成分を求めていくのが定義であるが、実は列ベクトルや行ベクトルを使えば、いくつか簡単な表記、便利な表記も成り立つことが知られている。

それらは、良く知られていることではあるけれども (初学者は誤解することがあるのでむしろ知らない方がいいかもしれないけれども)、教科書には記されていないことが多いので、それをここに紹介しておく。

## 2 記法

まず、本稿では、普通の意味でのベクトルは、すべて列ベクトル (縦並び) の形のものを考えることとする。すなわち、$N$ 次元数ベクトルは、

$$\boldsymbol{R}^N=\left\{\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_N\end{pmatrix};\ a_j\in\boldsymbol{R}\right\} \tag{2}$$

とし、そしてこの元を、$N\times 1$ 行列

$$\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_N\end{bmatrix}$$

と同一視することにする。この形のベクトルは、$\boldsymbol{a}$ のように小文字の太字で表す。

それに対して、行ベクトル、すなわち $1 \times N$ 行列 $A = [a_1\ a_2\ \cdots\ a_N]$ はそれとは異なるものとし、あくまで行列であると考え、転置によって通常のベクトルになると考える。すなわち、

$$
{}^{T}A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix} = \boldsymbol{a}
$$

とする。よって、$m \times n$ 行列 $A = [a_{ij}]_{m,n}$ は、各列の列ベクトル ($m$ 次元)

$$
\boldsymbol{a}_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}
$$

を用いて、$A = [\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \cdots \boldsymbol{a}_n]$ と表され、また、各行の行ベクトル $A_i = [a_{i1}\ a_{i2}\ \cdots a_{in}]$ の転置のベクトル ($n$ 次元)

$$
{}^{T}A_i = \hat{\boldsymbol{a}}_i = \begin{bmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \vdots \\ a_{in} \end{bmatrix}
$$

によって、

$$
A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{T}\hat{\boldsymbol{a}}_1 \\ {}^{T}\hat{\boldsymbol{a}}_2 \\ \vdots \\ {}^{T}\hat{\boldsymbol{a}}_m \end{bmatrix}
$$

と書けることになる。

なお、すでに何度か使っているが、$(i, j)$ 成分が $a_{ij}$ であるような $m \times n$ 行列のことを、本稿では $[a_{ij}]_{m,n}$ と書くことにする。

# 3 行列の積のいくつかの表現

以下、$A=[a_{ij}]_{m,n}$、$B=[b_{ij}]_{n,p}$ とし、2 節同様に $A,B$ の列ベクトルを $\boldsymbol{a}_j$ ($m$ 次元), $\boldsymbol{b}_j$ ($n$ 次元), 行ベクトルの転置を ${}^T\!A_i=\hat{\boldsymbol{a}}_i$ ($n$ 次元), ${}^T\!B_i=\hat{\boldsymbol{b}}_i$ ($p$ 次元) と書くことにする。

$$A=[\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n]=\begin{bmatrix}{}^T\hat{\boldsymbol{a}}_1\\ {}^T\hat{\boldsymbol{a}}_2\\ \vdots\\ {}^T\hat{\boldsymbol{a}}_m\end{bmatrix},\quad B=[\boldsymbol{b}_1\ \boldsymbol{b}_2\ \cdots\ \boldsymbol{b}_p]=\begin{bmatrix}{}^T\hat{\boldsymbol{b}}_1\\ {}^T\hat{\boldsymbol{b}}_2\\ \vdots\\ {}^T\hat{\boldsymbol{b}}_n\end{bmatrix}$$

ここで、

$$\boldsymbol{a}_j=\begin{bmatrix}a_{1j}\\ a_{2j}\\ \vdots\\ a_{mj}\end{bmatrix},\quad \hat{\boldsymbol{a}}_i=\begin{bmatrix}a_{i1}\\ a_{i2}\\ \vdots\\ a_{in}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{b}_j=\begin{bmatrix}b_{1j}\\ b_{2j}\\ \vdots\\ b_{nj}\end{bmatrix},\quad \hat{\boldsymbol{b}}_i=\begin{bmatrix}b_{i1}\\ b_{i2}\\ \vdots\\ b_{ip}\end{bmatrix}$$

である。

さて、積 $AB$ は、$B$ を列ベクトルで表すことで、まず次の形に書くことができる。

$$AB=A[\boldsymbol{b}_1\ \boldsymbol{b}_2\ \cdots\ \boldsymbol{b}_p]=[A\boldsymbol{b}_1\ A\boldsymbol{b}_2\ \cdots\ A\boldsymbol{b}_p] \tag{3}$$

最後の式は、各列ベクトルが $A\boldsymbol{b}_j$ の形の行列の積で、これは $m\times n$ 行列と $n\times 1$ 行列 (列ベクトル) の積だから $m\times 1$ 行列の $m$ 次元列ベクトルとなり、よって結果としてそれが $p$ 個並んだ $m\times p$ 行列となる。

見た目はベクトルのスカラー倍のような計算にも見えるが、実際には各列が行列の積になっているわけである。証明は、$A\boldsymbol{b}_j$ の上から $i$ 番目の成分が、

$${}^T\hat{\boldsymbol{a}}_i\boldsymbol{b}_j=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}=c_{ij}$$

となることから明らか。

次に、$A$ を行ベクトルで表すことで、次の形にも書くことができる。

$$AB=\begin{bmatrix}{}^T\hat{\boldsymbol{a}}_1\\ {}^T\hat{\boldsymbol{a}}_2\\ \vdots\\ {}^T\hat{\boldsymbol{a}}_m\end{bmatrix}B=\begin{bmatrix}{}^T\hat{\boldsymbol{a}}_1B\\ {}^T\hat{\boldsymbol{a}}_2B\\ \vdots\\ {}^T\hat{\boldsymbol{a}}_mB\end{bmatrix} \tag{4}$$

これも、一見ベクトルのスカラー倍にも見えるが、実際には各行が $1 \times n$ 行列 ${}^T\hat{\boldsymbol{a}}_j$ と $n \times p$ 行列 $B$ の積である $p$ 次元の行ベクトルで、よって $m \times p$ 行列になっている。

これも、証明は、${}^T\hat{\boldsymbol{a}}_i B$ の左から $j$ 番目の成分が、

$$ {}^T\hat{\boldsymbol{a}}_i \boldsymbol{b}_j = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = c_{ij} $$

となることから成立する。

さらに、$A$ を行ベクトル、$B$ を列ベクトルで表すと、

$$ AB = \begin{bmatrix} {}^T\hat{\boldsymbol{a}}_1 \\ {}^T\hat{\boldsymbol{a}}_2 \\ \vdots \\ {}^T\hat{\boldsymbol{a}}_m \end{bmatrix} [\boldsymbol{b}_1\ \boldsymbol{b}_2\ \cdots\ \boldsymbol{b}_p] = [\,{}^T\hat{\boldsymbol{a}}_i \boldsymbol{b}_j]_{m,p} = [\hat{\boldsymbol{a}}_i \cdot \boldsymbol{b}_j]_{m,p} \tag{5} $$

となる。

これも、一見 $m \times 1$ 行列と $1 \times p$ 行列の積にも見え、そしてそれと同じ計算をしているようだが、各要素が ${}^T\hat{\boldsymbol{a}}_i \boldsymbol{b}_j$ という $1 \times n$ 行列と $n \times 1$ 行列の積、すなわち、$n$ 次元ベクトル同士の内積 $\hat{\boldsymbol{a}}_i \cdot \boldsymbol{b}_j$ になっていて、単純なスカラー同士の積ではない。

これも証明は、その $(i, j)$ 成分が

$$ {}^T\hat{\boldsymbol{a}}_i \boldsymbol{b}_j = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = c_{ij} $$

であることから明らか。

また、逆に $A$ を列ベクトル、$B$ を行ベクトルで表すと、

$$ AB = [\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n] \begin{bmatrix} {}^T\hat{\boldsymbol{b}}_1 \\ {}^T\hat{\boldsymbol{b}}_2 \\ \vdots \\ {}^T\hat{\boldsymbol{b}}_n \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{a}_k\, {}^T\hat{\boldsymbol{b}}_k \tag{6} $$

となる。

これは、一見 $1 \times n$ 行列と $n \times 1$ 行列の積と同じ計算にも見えるが、実際には、各項が $m \times 1$ 行列 $\boldsymbol{a}_k$ と $1 \times p$ 行列 ${}^T\hat{\boldsymbol{b}}_k$ の積、すなわち $m \times p$ 行列となっていて、すなわち $m \times p$ 行列の $n$ 個の和になっている。

この証明は、$\boldsymbol{a}_k\,{}^T\hat{\boldsymbol{b}}_k$ の $(i,j)$ 成分が $a_{ik}b_{kj}$ のただ 1 項であり、よって (6) の右辺の $(i,j)$ 成分が

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = c_{ij}$$

となることから成り立つことがわかる。

また、$A$ を列ベクトル、$B$ を成分で表せば、

$$AB = [\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n]\begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix} = \left[\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{a}_k b_{k1}\ \ \sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{a}_k b_{k2}\ \ \cdots\ \ \sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{a}_k b_{kp}\right] \tag{7}$$

の形に表すことができるが、これは一見 $1 \times n$ 行列と $n \times p$ 行列の積の計算のようにも見える。

この証明は、$\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{a}_k b_{kj}$ の上から $i$ 番目の成分が

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = c_{ij}$$

となるので成立する。

逆に、$A$ を成分、$B$ を行ベクトルで表せば、

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} {}^T\hat{\boldsymbol{b}}_1 \\ {}^T\hat{\boldsymbol{b}}_2 \\ \vdots \\ {}^T\hat{\boldsymbol{b}}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{1k}\,{}^T\hat{\boldsymbol{b}}_k \\ \sum_{k=1}^{n} a_{2k}\,{}^T\hat{\boldsymbol{b}}_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{mk}\,{}^T\hat{\boldsymbol{b}}_k \end{bmatrix} \tag{8}$$

の形に表すこともできるが、これは一見 $m \times n$ 行列と $n \times 1$ 行列の積の計算のようにも見える。

この証明は、$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\,{}^T\hat{\boldsymbol{b}}_k$ の左から $j$ 番目の成分が

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = c_{ij}$$

となるので成立する。

# 4　応用

3 節で紹介した式の応用例をいくつか示す。

## 4.1　例 1

まず、(3) の応用例を一つ紹介する。

$A$ が $n$ 次正方行列、$A$ による $n$ 次元数ベクトル $\boldsymbol{p}_j$ $(j=1,2,\ldots,n)$ の像が $\boldsymbol{q}_j$、すなわち

$$A\boldsymbol{p}_j = \boldsymbol{q}_j$$

であり、$\{\boldsymbol{p}_j;\ j=1,2,\ldots,n\}$ が一次独立であるとき、$A$ を $\boldsymbol{p}_j, \boldsymbol{q}_j$ で表してみよう。

$\boldsymbol{p}_j, \boldsymbol{q}_j$ を並べてできる $n$ 次正方行列をそれぞれ $P, Q$ とする:

$$P = [\boldsymbol{p}_1\ \boldsymbol{p}_2\ \cdots\ \boldsymbol{p}_n], \quad Q = [\boldsymbol{q}_1\ \boldsymbol{q}_2\ \cdots\ \boldsymbol{q}_n]$$

このとき、(3) より

$$AP = A[\boldsymbol{p}_1\ \boldsymbol{p}_2\ \cdots\ \boldsymbol{p}_n] = [A\boldsymbol{p}_1\ A\boldsymbol{p}_2\ \cdots\ A\boldsymbol{p}_n] = [\boldsymbol{q}_1\ \boldsymbol{q}_2\ \cdots\ \boldsymbol{q}_n] = Q$$

となる。$\{\boldsymbol{p}_j\}$ が一次独立なので $P$ は正則、すなわち逆行列を持つので、よって、$A$ は $A = QP^{-1}$ と書ける。このようにして、$n$ 次元の一次変換行列 $A$ は、$n$ 個の一次独立なベクトルとその像によって決定することができる。

## 4.2　例 2

次に、(5) の応用例を一つ紹介する。

$n$ 個の $m$ 次元数ベクトル $\boldsymbol{a}_j$ $(j=1,2,\ldots,n,\ n\le m)$ が、単位ベクトルで、互いに垂直であるとき、それらの内積は

$$\boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{a}_j = \begin{cases} 0 & (i \neq j \text{ のとき}) \\ 1 & (i = j \text{ のとき}) \end{cases}$$

となる。なお、そのような $\{\boldsymbol{a}_j;\ j=1,2,\ldots,n\}$ の組は、$n \leq m$ でなければ取ることはできない。このとき、それを並べた行列

$$A = [\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n]$$

は $m \times n$ 行列となるが、${}^T\!AA$ は (5) により、

$$ {}^T\!AA = \begin{bmatrix} {}^T\boldsymbol{a}_1 \\ {}^T\boldsymbol{a}_2 \\ \vdots \\ {}^T\boldsymbol{a}_n \end{bmatrix} [\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n] = [\,{}^T\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{a}_j]_{n,n} = [\boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{a}_j]_{n,n} = E_n $$

となり、$n$ 次の単位行列になる。

特に、$n = m$ の場合は、${}^T\!A = A^{-1}$ となり、$A$ は直交行列となる。すなわち、$n$ 個の互いに垂直な $n$ 次元の単位ベクトルを列ベクトルとする $n$ 次の正方行列は直交行列となるし、逆に直交行列の列ベクトルは、互いに垂直な単位ベクトルとなる。

## 4.3 例 3

(6) の応用例を一つ紹介する。

$n$ 次正方行列 $A = [\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n]$ が表す一次変換は、$n$ 次元数ベクトル $\boldsymbol{x}$ を $A\boldsymbol{x}$ に移すが、それは (6) により、

$$ A\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{n} x_k \boldsymbol{a}_k $$

のように、$A$ の列ベクトルの、$\boldsymbol{x}$ の成分を係数とする線形結合として書けることになる。

すなわち、$A$ は、基本ベクトル $\boldsymbol{e}_k$ を $\boldsymbol{a}_k$ $(k = 1, 2, \ldots n)$ に変換する一次変換だということがわかる。

## 4.4 例 4

(7) の応用例を一つ紹介する。

$n$ 次正方行列 $A$ に対して、スカラー $\lambda$ と、$\mathbf{0}$ でない $n$ 次元数ベクトル $\boldsymbol{x}$ が、

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$$

を満たすとき、$\lambda$ を $A$ の**固有値**、$\boldsymbol{x}$ を $A$ の、$\lambda$ に関する**固有ベクトル**と言う。

$\lambda$ は

$$f(\lambda) = |\lambda E - A| = \lambda^n + \ldots = 0$$

という $n$ 次方程式の解であり、一般には複素数となるが、各 $A$ に対し重複も数えて、$n$ 個存在する。その各固有値 $\lambda$ に対して、固有ベクトルは少なくとも一つは存在するが、これも一般には複素数成分の数ベクトルとなる。$A$ の成分がすべて実数で、$\lambda$ も実数であれば、それに関する固有ベクトルは実数成分の数ベクトルが取れる。

$\boldsymbol{x}$ が $\lambda$ に関する固有ベクトルならば、$c\boldsymbol{x}$ $(c \neq 0)$ も $\lambda$ に関する固有ベクトル、$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ が $\lambda$ に関する固有ベクトルならば、$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ も $\lambda$ に関する固有ベクトルとなるので、$\lambda$ に関する固有ベクトル全体は、$\mathbf{0}$ も入れれば、1 次元以上の部分ベクトル空間を作る。

$A$ の $n$ 個の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ に対する $n$ 個の固有ベクトル $\boldsymbol{x}_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ が存在するとき、$\boldsymbol{x}_j$ を並べた行列を $X = [\boldsymbol{x}_1\ \boldsymbol{x}_2\ \cdots\ \boldsymbol{x}_n]$ とすると、$A\boldsymbol{x}_j = \lambda_j\boldsymbol{x}_j$、および (3), (7) より、

$$\begin{aligned} AX &= A[\boldsymbol{x}_1\ \boldsymbol{x}_2\ \cdots\ \boldsymbol{x}_n] = [A\boldsymbol{x}_1\ A\boldsymbol{x}_2\ \cdots\ A\boldsymbol{x}_n] \\ &= [\lambda_1\boldsymbol{x}_1\ \lambda_2\boldsymbol{x}_2\ \cdots\ \lambda_n\boldsymbol{x}_n] = [\boldsymbol{x}_1\ \boldsymbol{x}_2\ \cdots\ \boldsymbol{x}_n]\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \Large O \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ \Large O & & & \lambda_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

となる。よって、もし $\{\boldsymbol{x}_j\}$ が一次独立であれば $X$ は逆行列を持つので、

$$X^{-1}AX = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \Large O \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ \Large O & & & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad A = X\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \Large O \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ \Large O & & & \lambda_n \end{bmatrix}X^{-1} \tag{9}$$

と書ける。これを $A$ の**対角化**と呼ぶ。対角化により、例えば $A^m$ は

$$A^m = \left( X \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & O \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \lambda_n \end{bmatrix} X^{-1} \right)^m = X \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & O \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \lambda_n \end{bmatrix}^m X^{-1}$$

$$= X \begin{bmatrix} \lambda_1^m & & & O \\ & \lambda_2^m & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \lambda_n^m \end{bmatrix} X^{-1}$$

のように計算できる。

さらに、行列 $P_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ を

$$P_j = [\mathbf{0}\ \cdots\ \boldsymbol{x}_j\ \cdots\ \mathbf{0}]X^{-1} \tag{10}$$

とする。なお、この右辺の左の行列は、$j$ 列目が $\boldsymbol{x}_j$ で、それ以外の列はゼロベクトルとしたものである。すると、

$$P_j X = [P\boldsymbol{x}_1\ P\boldsymbol{x}_2\ \cdots\ P\boldsymbol{x}_n] = [\mathbf{0}\ \cdots\ \boldsymbol{x}_j\ \cdots\ \mathbf{0}]$$

となるので、この $P_j$ は、

$$P_j\boldsymbol{x}_k = \mathbf{0}\ (j \neq k), \quad P_j\boldsymbol{x}_j = \boldsymbol{x}_j$$

を満たす。すなわち $P_j$ は、$\boldsymbol{x}_j$ 方向のベクトルは変えず、$\boldsymbol{x}_j$ 以外の方向のベクトルはすべて消すような行列で、$\boldsymbol{x}_j$ 方向の**射影行列**と呼ばれる。ここにさらに $P_j$ を左からかけると、

$$P_j^2\boldsymbol{x}_k = \mathbf{0}\ (j \neq k), \quad P_j^2\boldsymbol{x}_j = P_j\boldsymbol{x}_j = \boldsymbol{x}_j$$

となるから、$P_j^2$ も (10) を満たすことになり、よって $P_j^2 = P_j$ となる。また、$i \neq j$ に対して、

$$P_iP_j\boldsymbol{x}_k = \mathbf{0}\ (j \neq k), \quad P_iP_j\boldsymbol{x}_j = P_i\boldsymbol{x}_j = \mathbf{0}$$

となるので、$P_iP_j = O$ となることもわかる。すなわち射影行列は、

$$P_j^2 = P_j, \quad P_iP_j = O\ (i \neq j) \tag{11}$$

を満たす。

この射影行列により、$X$ は

$$X = [\boldsymbol{x}_1\ \boldsymbol{x}_2\ \cdots\ \boldsymbol{x}_n] = \sum_{j=1}^{n} [\mathbf{0}\ \cdots\ \boldsymbol{x}_j\ \cdots\ \mathbf{0}] = \sum_{j=1}^{n} P_j X = (P_1 + \cdots + P_n) X$$

と書け、

$$AP_jX = A[\mathbf{0}\ \cdots\ \boldsymbol{x}_j\ \cdots\ \mathbf{0}] = [\mathbf{0}\ \cdots\ A\boldsymbol{x}_j\ \cdots\ \mathbf{0}] = [\mathbf{0}\ \cdots\ \lambda_j\boldsymbol{x}_j\ \cdots\ \mathbf{0}] = \lambda_j P_j X$$

となるので、結局、

$$AX = A\left(\sum_{j=1}^{n} P_j X\right) = \sum_{j=1}^{n} AP_jX = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j P_j X$$

となり、$X^{-1}$ を右からかければ、

$$A = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j P_j = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \cdots + \lambda_n P_n \tag{12}$$

が得られる。これは、$A$ の対角化 (9) の射影行列による表現であり、行列の**スペクトル分解**とも呼ばれる。この場合も、例えば $A^m$ は、(11) の性質により、

$$A^m = \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j P_j\right)^m = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^m P_j^m = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^m P_j = \lambda_1^m P_1 + \cdots + \lambda_n^m P_n$$

のように固有値の累乗のみで求まることになる。

# 5 最後に

本稿では、行列の積の表現に関するいくつかのバリエーションを紹介し、その応用例を示したが、最後はやや高度な話題である行列の対角化やスペクトル分解も簡単に紹介した。

余談ついでに補足すれば、行列の固有ベクトルから常に $n$ 個の一次独立なものが取れるとは限らないので、すべての行列がこのように変形できるわけではな

いが、この形になる場合は、これを利用してさらに行列の分数乗 (固有値がすべて実数で 0 以上の場合)

$$A^{1/m} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^{1/m} P_j = \lambda_1^{1/m} P_1 + \cdots + \lambda_n^{1/m} P_n$$

や、$e$ の行列乗

$$e^A = \sum_{j=1}^{n} e^{\lambda_j} P_j = e^{\lambda_1} P_1 + \cdots + e^{\lambda_n} P_n$$

なども考えることができ、それぞれ重要な応用も知られている。興味ある人は勉強してみるといいだろう。