

2024 年 03 月 25 日

2 変数の周期関数に関するある性質について III

新潟工科大学 基礎教育・教養系 竹野茂治

1 はじめに

これまで、[1], [2] で、気体の運動方程式の周期解の存在性やその性質を調べる中で生じた以下の予想と、それに関する結果を示してきたが、まだその結果は十分ではない。

予想 1.1

$\phi(x), \psi(x)$ が同じ周期を持つ実数値周期連続関数, $F(u, v)$ が 2 変数の連続関数のとき, $f(x, y) = F(\phi(x + y), \psi(x - y))$ の x に関する基本周期と y に関する基本周期は常に等しい。

この予想に関連して [2] では、 $[a, b]$ 上の連続関数 $G(u)$ と、 $[a, b]$ から $[a, b]$ への連続関数 $\eta(u)$ 、およびある自然数 k に対して、すべての $u \in [a, b]$ に対して

$$G(\eta^k(u)) = G(u) \quad (\eta^k(u) \text{ は } \eta \text{ の } k \text{ 重合成写像}) \quad (1)$$

が成り立つ場合、 $\eta(u)$ が $G(u)$ にどのような制限を与えるかを調べ、 $\eta(u)$ が単調で、 k がある条件を満たす場合に $G \circ \eta = G$ または $G \circ \eta^2 = G$ が成り立つことを示し、それによりいくつかの場合に対して予想 1.1 が成立することを示した。

一方、 η が単調ではない場合は、同様のことが成り立つかは不明で、特にカオスを生成する関数として良く知られている

$$\eta(u) = \phi_1(u) = 4u(1 - u) \quad (0 \leq u \leq 1) \quad (2)$$

の場合についてもよくわからない、としていたが、その後少しわかったこと、考えたことがあるので、それを本稿で報告する。

2 テント写像の場合

まずは、テント写像と呼ばれる次の $\eta = \phi_0(u)$ について考える。

$$\phi_0(u) = 1 - |2u - 1| = \begin{cases} 2u & \left(0 \leq u \leq \frac{1}{2}\right) \\ 2(1 - u) & \left(\frac{1}{2} < u \leq 1\right) \end{cases} \quad (3)$$

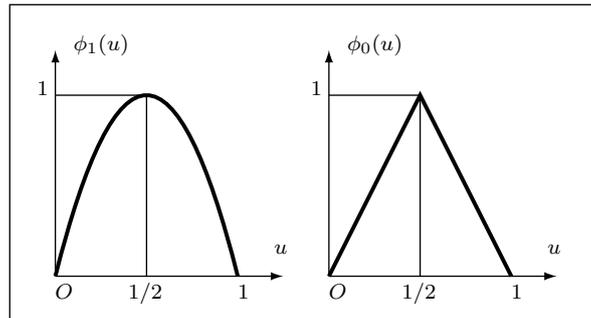


図 1: $\phi_1(u)$ と $\phi_0(u)$

なお、この関数と本稿で紹介する性質については、離散力学系分野では良く知られた話のようで、本稿で紹介する話の多くが、例えば [3] に書かれている。

補題 2.1

$\phi_0(u)$ に対し、 $\{\phi_0^n(u_0)\}_n$ が $[0, 1]$ で稠密となるような $u_0 \in (0, 1)$ が存在する。

なお、 $\mathbf{R} \supset A \supset B$ に対して B が A で稠密であるとは、任意の $u \in A \setminus B$ に対し、 $\{u_n\}_n \subset B$ で $u_n \rightarrow u$ となる部分列が存在することを意味する。

今、 $u \in [0, 1]$ に対し、その 2 進展開

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n} = \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \cdots \quad (a_n = 0 \text{ or } 1)$$

を、

$$u = (a_1, a_2, \dots)_2 \quad (4)$$

と書くことにする。なお、この 2 進展開は一意的ではなく、あるところから先が全部 1 の場合は、それを繰り上がりしてその先を全部 0 に換えたものと等しい:

$$(a_1, a_2, \dots, a_k, 0, 1, 1, 1, \dots)_2 = (a_1, a_2, \dots, a_k, 1, 0, 0, 0, \dots)_2 = (a_1, a_2, \dots, a_k, 1)_2$$

また、この最後の記号のように、あるところから先がすべて 0 の場合は、その部分を省略した形で書くことにする。さらに 0 か 1 の a_n に対して $\bar{a}_n = 1 - a_n$ と書くことにする。

$a_1 = 0$ ならば $u = (0, a_2, a_3, \dots)_2 \leq 1/2$ より、

$$\phi_0(u) = 2u = (a_2, a_3, \dots)_2$$

で、 $a_1 = 1$ ならば、 $u = (1, a_2, a_3, \dots)_2 \geq 1/2$ より、

$$\begin{aligned} \phi_0(u) &= 2(1 - u) = 2\{(1, 1, 1, \dots)_2 - (1, a_2, a_3, \dots)_2\} = 2(0, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \dots)_2 \\ &= (\bar{a}_2, \bar{a}_3, \dots)_2 \end{aligned}$$

なので、

$$\phi_0((a_1, a_2, \dots)_2) = \begin{cases} (a_2, a_3, \dots)_2 & (a_1 = 0 \text{ のとき}) \\ (\bar{a}_2, \bar{a}_3, \dots)_2 & (a_1 = 1 \text{ のとき}) \end{cases} \quad (5)$$

となる。よって、これを繰り返せば、任意の自然数 k に対して

$$\phi_0^k((a_1, a_2, \dots)_2) = \begin{cases} (a_{k+1}, a_{k+2}, \dots)_2 & (a_1, \dots, a_k \text{ のうち } 1 \text{ が偶数個}) \\ (\bar{a}_{k+1}, \bar{a}_{k+2}, \dots)_2 & (a_1, \dots, a_k \text{ のうち } 1 \text{ が奇数個}) \end{cases} \quad (6)$$

となる。よって、

- u の有限個の a_j のみが 1 ならば、ある m で $\phi_0^m(u) = 0$
- u の 2 進展開が循環小数 (すなわち u が有理数) ならば $\{\phi_0^n(u)\}_n$ は有限集合

となることがわかる。そして、 $\{\phi_0^n(u)\}_n$ が稠密となる u_0 も以下のようにして実際に構成できる。

稠密性に対しては、 $n \geq 1, 0 \leq m < 2^n$ となるすべての整数 n, m に対し、

$$\frac{m}{2^n} \leq \phi_0^k(u_0) \leq \frac{m+1}{2^n} \quad (7)$$

となる $k = k(n, m)$ が取れることを示せばよいが、この $m/2^n$ を、順に

$$\frac{0}{2}, \frac{1}{2} \mid \frac{0}{2^2}, \frac{1}{2^2}, \frac{2}{2^2}, \frac{3}{2^2} \mid \frac{0}{2^3}, \frac{1}{2^3}, \dots, \frac{7}{2^3} \mid \frac{0}{2^4}, \dots \quad (8)$$

のように並べる。これらは 2 進展開で表すと、

$$(0)_2, (1)_2 | (0, 0)_2, (0, 1)_2, (1, 0)_2, (1, 1)_2 | (0, 0, 0)_2, (0, 0, 1)_2, \dots, (1, 1, 1)_2 | \dots \quad (9)$$

等となる。 $\phi_0^k(u_0)$ の最初の位が順にこれらになるようにすれば、(7) を満たすので、そのように u_0 を作成する。すなわち、最初の桁を 0 とし、それ以降は (9) の並びに、そこまでの 1 が偶数個になるように調整用の 1 を挟んだものを u_0 とすればよい:

$$u_0 = (0, \underline{0}, \underline{1}, 1, | \underline{0}, \underline{0}, \underline{0}, 1, 1, \underline{1}, \underline{0}, 1, \underline{1}, \underline{1}, | \underline{0}, \underline{0}, \underline{0}, \underline{0}, \underline{0}, 1, 1, \underline{0}, \underline{1}, \underline{0}, 1, \underline{0}, \underline{1}, \underline{1}, \dots)_2 \quad (10)$$

下線のついた部分が (9) の並び、下線がついていないのが調整用の 1 で、この u_0 を使えば、反転が随時解消され、シフトによって、下線を引いたところ以下の列が $\phi_0^k(u_0)$ の値として現れることになる。そして

$$\begin{aligned} (0)_2 &< \phi_0^1(u_0) < (1)_2 < \phi_0^2(u_0) < 1, \\ (0, 0)_2 &< \phi_0^4(u_0) < (0, 1)_2 < \phi_0^6(u_0) < (1, 0)_2 < \phi_0^9(u_0) < (1, 1)_2 < \phi_0^{12}(u_0) < 1, \\ &\dots \end{aligned}$$

が成り立つ。これにより $\{\phi_0^n(u_0)\}_n$ は $[0, 1]$ で稠密となる。

さらに、同じようにして、任意の $k > 1$ に対して、 $\{\phi_0^{kn}(u_1)\}_n$ が $[0, 1]$ で稠密となるように u_1 を構成することもできる。それには、(10) の下線部の先頭が出る場所が k の倍数 +1 になるように随時 0 を挟んで調整すればいい。例えば $k = 3$ であれば、

$$\begin{aligned} u_1 = & (0, 0, 0, \underline{0}, 0, 0, \underline{1}, 1, 0, | \underline{0}, \underline{0}, \underline{0}, \underline{0}, 1, 1, \underline{1}, \underline{0}, 1, \underline{1}, \underline{1}, 0, | \underline{0}, \underline{0}, \underline{0}, \underline{0}, 1, 1, 0, 0, \\ & \underline{0}, \underline{1}, \underline{0}, 1, 0, 0, \underline{0}, \underline{1}, \underline{1}, \underline{1}, \underline{1}, 1, 0, 0, | \underline{0}, \underline{0}, \underline{0}, \underline{0}, 0, 0, \underline{0}, \underline{0}, \underline{0}, 1, 1, 0, \dots)_2 \end{aligned}$$

のように並べていけばよい。

すなわち、 $\phi_0(u)$ と連続関数 $G(u)$ 、ある自然数 k に対して、

$$G(\phi_0^k(u)) = G(u) \quad (0 \leq u \leq 1) \quad (11)$$

が成り立つ場合、上の u_1 に対して、

$$G(u_1) = G(\phi_0^k(u_1)) = G(\phi_0^{kn}(u_1))$$

となり、 $\{\phi_0^{kn}(u_1)\}_n$ は $[0, 1]$ で稠密なので、 G の連続性により G は $[0, 1]$ 上で $G(u_1)$ に等しい定数関数となり、よって (11) を満たす関数 G は定数以外ないことがわかる。

なお、本節の u_0 の構成については、[3] にも紹介されている。

3 その他の η の場合

次に、 $\phi_0(u)$ 以外の η を考える。まずは $\eta = \phi_1(u) = 4u(1-u)$ から。

実は、 $\phi_0(u)$ と $\phi_1(u)$ とは、これも [3] でも紹介されているが、関数

$$\xi_1(u) = \frac{1 - \cos \pi u}{2} = \sin^2 \frac{\pi}{2} u \quad (12)$$

を通じてつながることが知られている。

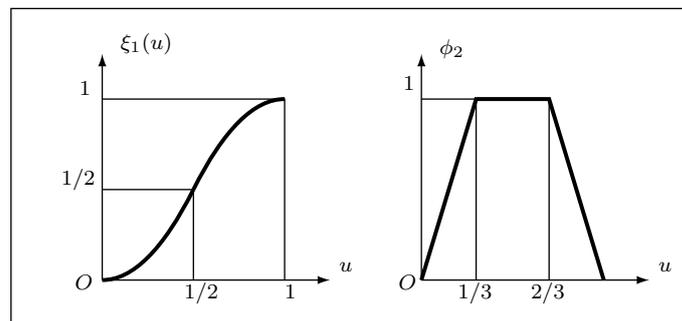


図 2: $\xi_1(u)$ と $\phi_2(u)$

この $\xi_1(u)$ は $[0, 1]$ で連続かつ単調増加で、 $\xi_1(0) = 0$, $\xi_1(1/2) = 1/2$, $\xi_1(1) = 1$ を満たす。 $0 \leq u \leq 1/2$ では、

$$\xi_1(2u) = \sin^2 \pi u = 4 \sin^2 \frac{\pi}{2} u \cos^2 \frac{\pi}{2} u = 4\xi_1(u)(1 - \xi_1(u)) = \phi_1(\xi_1(u))$$

となり、また $1/2 \leq u \leq 1$ では、

$$\xi_1(2(1-u)) = \sin^2 \pi(1-u) = \sin^2 \pi u = 4\xi_1(u)(1 - \xi_1(u)) = \phi_1(\xi_1(u))$$

となって、よって

$$\xi_1(\phi_0(u)) = \phi_1(\xi_1(u)) \quad (0 \leq u \leq 1)$$

が成り立つ。ここから、 $\phi_1(u) = (\xi_1 \circ \phi_0 \circ \xi_1^{-1})(u)$ となり、そして

$$\phi_1^n(u) = (\xi_1 \circ \phi_0^n \circ \xi_1^{-1})(u)$$

も言える。

よって、 $k \geq 1$ に対して、

$$G(\phi_1^k(u)) = G(u) \quad (0 \leq u \leq 1)$$

が満たされる場合、 $\hat{G}(u) = (G \circ \xi_1)(u)$ とすれば、 $\hat{G}(u)$ は連続で、

$$G(\phi_1^k(u)) = G((\xi_1 \circ \phi_0^k \circ \xi_1^{-1})(u)) = \hat{G}((\phi_0^k \circ \xi_1^{-1})(u)), \quad G(u) = \hat{G}(\xi_1^{-1}(u))$$

より

$$\hat{G}(\phi_0^k(u)) = \hat{G}(u) \quad (0 \leq u \leq 1)$$

が成り立つので、2 節により $\hat{G}(u)$ は定数となり、よって $G(u)$ も定数となる。つまり、 η が ϕ_1 の場合でも (1) が成り立てば G は定数となることがわかる。

同様のことは、 $\xi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ が全単射で連続 (よって単調) の場合、

$$\psi(u) = (\xi \circ \phi_0 \circ \xi^{-1})(u) \tag{13}$$

となる $\psi(u)$ に対しても言え、すなわち G を定数にする。

例えば、 $\xi_2(u) = 1 - (1 - u)^2$ は $[0, 1]$ から $[0, 1]$ の全単射な連続関数で、

$$\xi_2^{-1}(u) = 1 - \sqrt{1 - u} \quad (0 \leq u \leq 1)$$

なので、

$$(\phi_0 \circ \xi_2^{-1})(u) = \begin{cases} 2 - 2\sqrt{1 - u} & \left(0 \leq u \leq 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ 2\sqrt{1 - u} & \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \leq u \leq 1\right) \end{cases}$$

より、

$$(\xi_2 \circ \phi_0 \circ \xi_2^{-1})(u) = 1 - (2\sqrt{1 - u} - 1)^2 = 4\sqrt{1 - u} - 4(1 - u)$$

となる。なお、これは $u = 1 - 1/\sqrt{2}$ での特異性も消えているが、それは $\xi'_2(1-0) = 0$ による。

(13) により $G(u)$ を定数にする η のバリエーションが増えるが、次はそれには含まれない、次のような関数を考えてみる。

$$\phi_2(u) = \begin{cases} 3u & \left(0 \leq u \leq \frac{1}{3}\right) \\ 1 & \left(\frac{1}{3} \leq u \leq \frac{2}{3}\right) \\ 3(1-u) & \left(\frac{2}{3} \leq u \leq 1\right) \end{cases} \quad (14)$$

$u \in [0, 1]$ を 3 進展開して、

$$u = \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \frac{a_3}{3^3} + \cdots = (a_1, a_2, a_3, \dots)_3 \quad (a_j = 0, 1, 2) \quad (15)$$

と書き、 $\bar{a}_j = 2 - a_j$ とする。あるところから先が 0 の場合は、2 進の場合同様

$$\frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \cdots + \frac{a_k}{3^k} = (a_1, a_2, \dots, a_k)_3$$

と書く。

(15) で $a_1 = 0$ の場合は $u \leq 1/3$ より

$$\phi_2(u) = 3u = 3(0, a_2, a_3, a_4, \dots)_3 = (a_2, a_3, a_4, \dots)_3$$

のシフトになり、 $a_1 = 1$ の場合は $1/3 \leq u \leq 2/3$ より

$$\phi_2(u) = 1 \quad (\phi_2^2(u) = 0)$$

となる。 $a_1 = 2$ の場合は $u \geq 2/3$ より

$$\begin{aligned} \phi_2(u) &= 3(1-u) = 3((2, 2, 2, \dots)_3 - (2, a_2, a_3, \dots)_3) = 3(0, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \dots)_3 \\ &= (\bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{a}_4, \dots)_3 \end{aligned}$$

の反転とシフトをしたものになる。

よって $a_j = 1$ が途中に含まれると、少なくとも $k \geq j + 1$ に対して

$$\phi_2^k(u) = 0 \quad (16)$$

となる。そのような u は、 $n \geq 1, 0 \leq m < 3^{n-1}$ の整数 n, m に対し

$$\frac{3m+1}{3^n} \leq u \leq \frac{3m+2}{3^n}$$

となるものがすべて該当する。なお $u = (3m+2)/3^n$ の場合は、 $a_n = 2, a_{n+j} = 0$ ($j \geq 1$) だが、それは $a_n = 1, a_{n+j} = 2$ と書くこともできるので上に含まれることになる。

その u の集合を、

$$\left\{ \begin{array}{l} U_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=0}^{3^{n-1}-1} \left[\frac{3m+1}{3^n}, \frac{3m+2}{3^n} \right] \\ = \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right] \cup \left[\frac{1}{9}, \frac{2}{9} \right] \cup \left[\frac{7}{9}, \frac{8}{9} \right] \cup \left[\frac{1}{27}, \frac{2}{27} \right] \cup \left[\frac{7}{27}, \frac{8}{27} \right] \cup \left[\frac{19}{27}, \frac{20}{27} \right] \\ \cup \left[\frac{25}{27}, \frac{26}{27} \right] \cup \left[\frac{1}{81}, \frac{2}{81} \right] \cdots \\ U_1 = U_0 \cup \{0, 1\} \end{array} \right. \quad (17)$$

とする。これは、いわゆるカントール 3 進集合の補集合 (cf.[4]) に近いものになっていて、 U_0, U_1 の幅は、

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2^2}{3^3} + \cdots = 1$$

となるので U_1 の補集合 U_1^c はいわゆる 0 集合となる。

U_1^c の元は、0, 2 のみの a_j からなる 3 進表示を持つが、 a_j が 0, 2 のみで、あるところから先の a_j がすべて 0、またはあるところから先の a_j がすべて 2 の u は、 $u = (3m+1)/3^n, (3m+2)/3^n$ の形か、または 0, 1 のいずれかとなり、それらはすべて U_1 に含まれるので、よって U_1^c は a_j が 0 または 2 で、あるところから先が全部 0、およびあるところから先が全部 2 になるものを除いたもの、となる。すなわち、有限の 3 進展開になる $u = (a_1, a_2, \dots, a_k)_3$ はすべて U_1 に含まれる。

そしてこの場合、 $U_1^c \ni u$ ならば $\phi_2(u) \in U_1^c$ であり、一方 $U_1 \ni u$ ならば a_j に 1 が含まれるか、または有限の 3 進展開表示を持つか 0, 1 のいずれかなので、そのいずれの場合もある k に対し $\phi_2^k(u) = 0$ となる。

次に、 $u_2 \in U_1^c$ で、 $\{\phi_2^n(u_2)\}_n$ が U_1^c で稠密となるような u_2 が取れることを示す。それには、 ϕ_0 と u_0 の場合のように、

$$(0)_3, (2)_3 \mid (0, 0)_3, (0, 2)_3, (2, 0)_3, (2, 2)_3 \mid (0, 0, 0)_3, (0, 0, 2)_3, \dots$$

を順に並べ、これらが先頭の桁に順に出るように u_2 を作る。反転を調整するように 0 や 2 を適宜挟んで作ればよい。例えば、

$$u_2 = (0, \underline{0}, \underline{2}, \underline{2}, \mid \underline{0}, \underline{0}, \underline{0}, \underline{2}, \underline{2}, \underline{2}, \underline{0}, \underline{2}, \underline{2}, \underline{2}, \mid \underline{0}, \underline{0}, \underline{0}, \underline{0}, \underline{0}, \underline{2}, \underline{2}, \dots)_3$$

のようにすれば、この u_2 に対して $\{\phi_2^n(u_2)\}_n$ が U_1^c で稠密となる。また、さらに任意の自然数 k に対して、上の u_2 に適当に 0 を挿入したものを u'_2 とすることで、 $\{\phi_2^{kn}(u'_2)\}_n$ が U_1^c で稠密となるようにできることも、 ϕ_0 の場合と同様である。

この場合、 $\phi_2(u)$ と自然数 k に対して、

$$G(\phi_2^k(u)) = G(u) \quad (0 \leq u \leq 1) \quad (18)$$

が成り立つ場合、 G が定数となるかを考える。 $u \in U_1$ の場合は、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_2^{kn}(u) = 0$$

なので、その u に対しては (18) より、

$$G(u) = G(\phi_2^{kn}(u)) \rightarrow G(0) \quad (19)$$

すなわち $u \in U_1$ に対しては $G(u) = G(0)$ となる。

一方、 $u \in U_1^c$ の場合は、 $\{\phi_2^{kn}(u'_2)\}_n$ が U_1^c で稠密なので、ある増加無限数列 $\{n_j\}_j$ で、

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \phi_2^{kn_j}(u'_2) = u$$

となるものが取れる。よって、 G の連続性により、

$$G(u) = \lim_{j \rightarrow \infty} G(\phi_2^{kn_j}(u'_2)) = G(u'_2) \quad (20)$$

が成り立つ。そして u'_2 の 3 進表示の m 桁目より先をすべて 0 としたものを $u'_2(m)$ とすると、 $u'_2(m) \in U_1$ で、かつ

$$\lim_{m \rightarrow \infty} u'_2(m) = u'_2$$

となるので、(19), (20) より、

$$G(u'_2) = \lim_{m \rightarrow \infty} G(u'_2(m)) = G(0)$$

となるので、結局 $G(u)$ は $[0, 1]$ 上定数 $G(0)$ に等しいことがわかった。

この $\phi_2(u)$ のように $\xi \circ \phi_0 \circ \xi^{-1}$ では表せないようなものでも、 G を定数にする性質も持つものがある。もちろん、この $\phi_2(u)$ に対しても、全単射で連続な $\xi: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ に対して $(\xi \circ \phi_2 \circ \xi^{-1})(u)$ はすべて G を定数にすることになる。

4 全射でない場合

$\phi_0(u)$ は $[0, 1]$ への全射のテント写像だが、全射でないテント型の写像の場合はどうなるかを最後に考えてみる。

$0 \leq a < b \leq 1$ に対し

$$\phi_3(u) = b - (b - a)|2u - 1| = b - 2(b - a) \left| u - \frac{1}{2} \right| \quad (0 \leq u \leq 1) \quad (21)$$

とすると、 $\phi_3(u)$ の像は $[a, b] \subset [0, 1]$ となる。

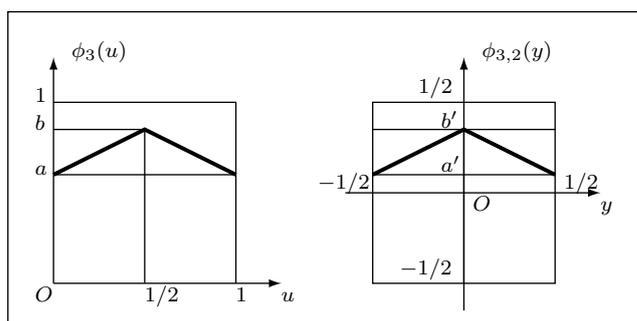


図 3: $\phi_3(u)$ と $\phi_{3,2}(y)$

この場合、 $\phi_3^n(u)$ がどのようなようになるか、数値計算してみた結果、ほぼ以下のものであった。

- (a) $b - a < 1/2$ の場合、 $\phi_3^n(u) \rightarrow$ 定数
- (b) $b - a = 1/2$ の場合、 $\phi_3^n(u)$ は、あるところから先は、傾き 1 ののこぎり型の 2 パターンのもの (半歯分ずらしたもの) が交互に現れる
- (c) $b - a > 1/2$ の場合、 $\phi_3^n(u)$ のグラフはカオス的で、 $b - a$ でその形が決まり、 a を変えると相似比が変わる、つまり $b - a$ を固定して a を動かすと $a = 0$ の場合を縦横同率に拡大したものになる。

最後の (c) の場合のカオス的なグラフを明確に表すこと、およびそれを証明することは難しいが、(a),(b), および (c) の後半部分はちゃんと示すことができた。それを以下で紹介する。

$\delta = 2(b - a) \in (0, 2]$ とすると、 ϕ_3 は

$$\phi_3(u) = b - \delta \left| u - \frac{1}{2} \right| = a + \frac{\delta}{2} - \delta \left| u - \frac{1}{2} \right| = \begin{cases} a + \delta u & (u \leq 1/2) \\ a + \delta(1 - u) & (1/2 \leq u) \end{cases} \quad (22)$$

と書けるが、さらに議論を簡単にするために、 $\xi_2(y) = y - 1/2$ によって平行移動して考える:

$$\begin{aligned} \phi_{3,2}(y) &= (\xi_2 \circ \phi_3 \circ \xi_2^{-1})(y) = \phi_3\left(y + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} = b' - \delta|y| \\ &\left(b' = b - \frac{1}{2}, a' = a - \frac{1}{2}\right) \end{aligned} \quad (23)$$

$\phi_{3,2}^n = \xi_2 \circ \phi_3^n \circ \xi_2^{-1}$ なので、 ϕ_3^n の漸近性は $\phi_{3,2}^n$ の漸近性を調べることでわかる。

$\phi_{3,2}(y)$ のグラフは折れ線で、その傾きは $\pm\delta$ なので、その多重写像 $\phi_{3,2}^n(y)$ も折れ線で、その傾きは $\pm\delta^n$ となる。 $u = y + 1/2$ より $0 \leq u \leq 1$ は $|y| \leq 1/2$ に対応し、 $\phi_{3,2}(y)$ は偶関数で、

$$\phi_{3,2}(0) = b', \quad \phi_{3,2}\left(\pm\frac{1}{2}\right) = a' \quad \left(-\frac{1}{2} \leq a' < b' \leq \frac{1}{2}\right)$$

となる。

まず (a) の $0 < \delta < 1$ の場合から考える。この場合、 $\phi_{3,2}^n(y)$ の傾き $\pm\delta^n$ は $n \rightarrow \infty$ に対し 0 に収束するので $\phi_{3,2}^n(y)$ は水平な直線に収束しそうであるが、それをちゃんと示す。

$b \leq 0$ ($b < 1/2$) の場合は、 $\phi_{3,2}(y) \leq b' \leq 0$ なので、 $\phi_{3,2}^n(y) \leq b' \leq 0$ となり、よって (23) より

$$\phi_{3,2}^{n+1}(y) = b' + \delta \phi_{3,2}^n(y) \quad (24)$$

の漸化式が成り立つ。

$a' \geq 0$ ($a \geq 1/2$) の場合は、 $\phi_{3,2}^n(y) \geq 0$ なので、(23) より

$$\phi_{3,2}^{n+1}(y) = b' - \delta \phi_{3,2}^n(y) \quad (25)$$

が成り立つ。

$a' < 0 < b'$ ($a < 1/2 < b$) の場合は、あるところから先の n では $\phi_{3,2}^n(y) \geq 0$ となることを示そう。

まず、この場合 $\beta = b'/\delta$ と $-\beta$ で $\phi_{3,2}(\pm\beta) = 0$ となる。 $\phi_{3,2}^n(c) = 0$ となる $c \in [-1/2, 1/2]$ がある間は、そこで $\phi_{3,2}^{n+1}(c) = b'$ と最大値を取る。つまりそこまでは $\phi_{3,2}^n(y) = b'$ となる y も存在している。

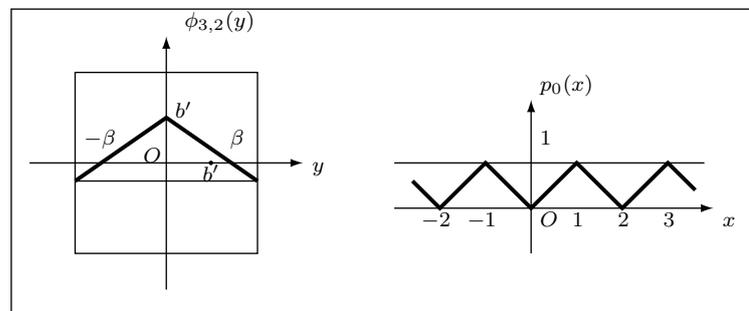


図 4: $a' < 0 < b'$ の $\phi_{3,2}(y)$ と $p_0(x)$ のグラフ

一方で $\phi_{3,2}^n(c)$ の傾きは $\pm\delta^n$ で、これは 0 に収束していくから、 $\phi_{3,2}^{n_0}(y)$ は最大値 b' を取るが、 $|y| \leq 1/2$ で $\phi_{3,2}^{n_0}(y) = 0$ となる y がないような n_0 が存在することになる。このとき、 $0 < \phi_{3,2}^{n_0}(y) \leq b' < \beta$ ($0 < \delta < 1$) なので、 $n \geq n_0$ ではすべて $0 < \phi_{3,2}^n(y) \leq b' < \beta$ となる。

つまり、この場合も $n \geq n_0$ では、(25) を満たすことになる。すなわち漸近的には (24), (25) のどちらかの状態になる。これらは 1 次の漸化式で係数は $\delta \in (0, 1)$ なので、その数列は収束し、

- (24) ならば $\phi_{3,2}^n(y) \rightarrow \frac{b'}{1-\delta}$
- (25) ならば $\phi_{3,2}^n(y) \rightarrow \frac{b'}{1+\delta}$

となる。これで (a) が示されたことになる。

次は (b) の $\delta = 1$ の場合を考える。この場合は、 $b' = b - 1/2 = a$ より、

$$\phi_{3,2}(y) = a - |y| \quad (26)$$

となる ($0 \leq a \leq 1/2$)。なお、以下では (26) をこの式のままで $|y| \leq 1/2$ の外まで拡張して考えることにする。

$a = 0$ ($b = 1/2$) のときは、明らかに $\phi_{3,2}^n(y) = -|y|$ となるから、以後は $a > 0$ とする。なお、この $a = 0$ のときは、厳密には (b) は成立しないことになる。

この $\phi_{3,2}^n(y)$ を具体的に書き下すために、新たな関数を導入する。まず、 $p_0(x)$ を、周期が 2 で

$$p_0(x) = |x| \quad (-1 \leq x \leq 1) \quad (27)$$

を満たすものとする。なお、これは一本の式で

$$p_0(x) = \frac{\cos^{-1}(\cos \pi x)}{\pi} \quad (28)$$

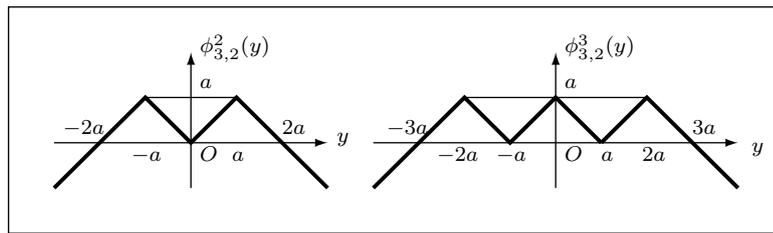
と書くこともできる。また、 $H(y) = 1 - y$ とする。

このとき、 $z = \phi_{3,2}^n(y)$ のグラフは以下のようになり、 $z \geq 0$ の部分は山が z 軸に対称に n 個でて、その端のスロープが $z < 0$ の方向に伸びる、という形になる。

すなわち、

$$\phi_{3,2}^n(y) = \begin{cases} aH^n\left(p_0\left(\frac{y}{a}\right)\right) & (|y| \leq na) \\ na - |y| & (|y| > na) \end{cases} \quad (29)$$

となることが予想される。これをちゃんと示す。なお、(29) は両辺とも偶関数なので、 $y \geq 0$ に対して等しいことを示せばよい。

図 5: $\phi_{3,2}^2(y)$ と $\phi_{3,2}^3(y)$

まず $n = 1$ のときは、 $0 \leq y \leq a$ では $0 \leq y/a \leq 1$ より、

$$aH^1\left(p_0\left(\frac{y}{a}\right)\right) = a\left(1 - p_0\left(\frac{y}{a}\right)\right) = a\left(1 - \frac{y}{a}\right) = a - y = \phi_{3,2}(y)$$

となり、 $y > a$ では明らかに両辺は一致するので、 $n = 1$ では (29) は成り立つ。

n まで (29) が成り立つことが示されたとして、 $n + 1$ でも成り立つことを示す。

$$\phi_{3,2}^{n+1}(y) = a - |\phi_{3,2}^n(y)|$$

なので、 $0 \leq y \leq na$ では、(29) より $\phi_{3,2}^n(y) \geq 0$ で、よって、

$$\phi_{3,2}^{n+1}(y) = a - \phi_{3,2}^n(y) = a - aH^n\left(p_0\left(\frac{y}{a}\right)\right) = aH^{n+1}\left(p_0\left(\frac{y}{a}\right)\right)$$

となるので、(29) は $n + 1$ に対して $0 \leq y \leq na$ では成立する。

次は、 $y \geq (n + 1)a$ の場合を考えると、このときは、(29) より $\phi_{3,2}^n(y) \leq 0$ で、よって

$$\phi_{3,2}^{n+1}(y) = a + \phi_{3,2}^n(y) = a + (na - y) = (n + 1)a - y$$

となって (29) の右辺に一致する。

あとは $na < y < (n + 1)a$ の場合。この場合は (29) より $\phi_{3,2}^n(y) \leq 0$ で、よって、

$$\phi_{3,2}^{n+1}(y) = a + \phi_{3,2}^n(y) = (n + 1)a - y$$

となるが、これが $n + 1$ の $na < y < (n + 1)a$ の場合の (29) の右辺の

$$aH^{n+1}\left(p_0\left(\frac{y}{a}\right)\right)$$

に等しいことを示せばよい。 $n < y/a < n+1$ より、

$$p_0\left(\frac{y}{a}\right) = \begin{cases} p_0\left(\frac{y}{a} - n\right) & = \frac{y}{a} - n & (n \text{ が偶数のとき}) \\ p_0\left(\frac{y}{a} - n - 1\right) & = 1 + n - \frac{y}{a} & (n \text{ が奇数のとき}) \end{cases}$$

であり、

$$H^{n+1}(X) = \begin{cases} 1 - X & (n \text{ が偶数のとき}) \\ X & (n \text{ が奇数のとき}) \end{cases}$$

なので、

$$\begin{aligned} aH^{n+1}\left(p_0\left(\frac{y}{a}\right)\right) &= \begin{cases} a\left(1 - p_0\left(\frac{y}{a}\right)\right) & (n \text{ が偶数のとき}) \\ ap_0\left(\frac{y}{a}\right) & (n \text{ が奇数のとき}) \end{cases} \\ &= a\left(1 - \frac{y}{a} + n\right) = (n+1)a - y = \phi_{3,2}^n(y) \end{aligned}$$

となつて、これで (29) が $n+1$ に対してすべての y で示されたことになり、帰納法により (29) が成立することになる。

$|y| \leq 1/2$ に限定して考えれば、(29) は $n_0 \geq 1/(2a)$ なる $1n_0$ より大きい n では H で表されるノコギリ型の部分のみになり、それが n が偶数か奇数かによって H で上下反転され、見方によっては半歯分横に移動したとも見れることになる。

これで (b) も示されたことになるが、厳密に言えば $a > 0$ のときは正しく、 $a = 0$ のときは正しくはない。

最後は (c) の $\delta > 1$ の場合の後半部分を考える。すなわち、この場合に

$$\phi_{3,2}(y) = b' - \delta|y| = a' + \frac{\delta}{2} - \delta|y| \quad (30)$$

のグラフが、 $a = 0$ 、すなわち $a' = -1/2$ に対する $\phi_{3,2}(y)$ である

$$\hat{\phi}_{3,2}(y) = -\frac{1}{2} + \frac{\delta}{2} - \delta|y| \quad (31)$$

のグラフと相似であることを示せばよい。この場合、 $(\delta - 1)/2 > 0$ であることに注意すると、

$$\begin{aligned}\phi_{3,2}(y) &= a' + \frac{\delta}{2} - \delta|y| = \frac{2a' + \delta}{\delta - 1} \left(\frac{\delta - 1}{2} - \delta \left| \frac{\delta - 1}{2a' + \delta} y \right| \right) \\ &= \frac{2a' + \delta}{\delta - 1} \hat{\phi}_{3,2} \left(\frac{\delta - 1}{2a' + \delta} y \right)\end{aligned}$$

となり、これは、 $z = \phi_{3,2}(y)$ のグラフが、 $z = \hat{\phi}_{3,2}(y)$ のグラフを y 方向、 z 方向に $(2a' + \delta)/(\delta - 1) = (2a + \delta - 1)/(\delta - 1)$ 倍したものであることを意味する。

ただし、 $z = \hat{\phi}_{3,2}(y)$ のグラフは δ 毎に形がかなり異なり、それを決定することは容易ではなさそうである。

さて、(a) の場合は、

$$G(\phi_3^k(u)) = G(u) \quad (0 \leq u \leq 1) \quad (32)$$

ならば、 $\phi_3^{kn}(u) \rightarrow \alpha$ (定数) なので、

$$G(u) = G(\phi_3^{kn}(u)) \rightarrow G(\alpha)$$

より G は定数となる。

(b) で $a > 0$ の場合は、

- (32) が成り立ち、 k が偶数ならば、 $G(\phi_3^2(u)) = G(u)$ が成り立つ
- (32) が成り立ち、 k が奇数ならば、 $G(\phi_3(u)) = G(u)$ が成り立つ

となることが言える。それを以下に示そう。まず、(32) を平行移動した $\phi_{3,2}(y)$ に帰着すると、 $G \circ \xi^{-1} = \hat{G}$ とすれば

$$\hat{G}(\phi_{3,2}^k(y)) = \hat{G}(y) \quad \left(|y| \leq \frac{1}{2} \right) \quad (33)$$

となる。

k が偶数の場合、(33) が成り立つときは

$$\hat{G}(y) = \hat{G}(\phi_{3,2}^{kn}(y))$$

が成り立つが、 n が大きければ $|y| \leq 1/2$ では

$$\phi_{3,2}^{kn}(y) = ap_0\left(\frac{y}{a}\right)$$

となるので、

$$\hat{G}(y) = \hat{G}\left(ap_0\left(\frac{y}{a}\right)\right) \quad (34)$$

が成り立つことになる。一方、

$$\phi_{3,2}^2(y) = \begin{cases} ap_0\left(\frac{y}{a}\right) & (|y| \leq 2a) \\ 2a - |y| & (|y| \geq 2a) \end{cases}$$

なので、 $\hat{G}(y) = \hat{G}(\phi_{3,2}^2(y))$ が成り立つためには、 $|y| \geq 2a$ で $\hat{G}(2a - |y|) = \hat{G}(y)$ となることを示せばよい。(34) より、

$$\hat{G}(2a - |y|) = \hat{G}\left(ap_0\left(\frac{2a - |y|}{a}\right)\right) = \hat{G}\left(ap_0\left(2 - \frac{|y|}{a}\right)\right)$$

となるが、 p_0 は周期 2 の偶関数なので、

$$p_0\left(2 - \frac{|y|}{a}\right) = p_0\left(-\frac{|y|}{a}\right) = p_0\left(\frac{|y|}{a}\right)$$

となり、よって (34) より

$$\hat{G}(2a - |y|) = \hat{G}\left(ap_0\left(\frac{|y|}{a}\right)\right) = \hat{G}(y)$$

となり、よって $\hat{G}(\phi_{3,2}^2(y)) = \hat{G}(y)$ となる。

k が奇数の場合は、(33) より、

$$\hat{G}(y) = \hat{G}(\phi_{3,2}^{kn}(y))$$

で、 n が大きければ n が偶数なら kn は偶数、 n が奇数ならば kn は奇数なので、

$$\hat{G}(y) = \hat{G}\left(a\left(1 - p_0\left(\frac{y}{a}\right)\right)\right) = \hat{G}\left(ap_0\left(\frac{y}{a}\right)\right) \quad (35)$$

が成り立つ。

$$\phi_{3,2}(y) = \begin{cases} a \left(1 - p_0\left(\frac{y}{a}\right)\right) & (|y| \leq a) \\ a - |y| & (|y| \geq a) \end{cases}$$

なので、 $\hat{G}(y) = \hat{G}(\phi_{3,2}(y))$ が成り立つためには、 $|y| \geq a$ で $\hat{G}(a - |y|) = \hat{G}(y)$ となればよい。まず、半波ずらした $p_0(x)$ に対し

$$p_0(x - 1) = 1 - p_0(x)$$

が成り立つことに注意する。(35) より、

$$\begin{aligned} \hat{G}(a - |y|) &= \hat{G}\left(ap_0\left(\frac{a - |y|}{a}\right)\right) = \hat{G}\left(ap_0\left(1 - \frac{|y|}{a}\right)\right) \\ &= \hat{G}\left(ap_0\left(\frac{|y|}{a} - 1\right)\right) = \hat{G}\left(a\left(1 - p_0\left(\frac{|y|}{a}\right)\right)\right) \\ &= \hat{G}\left(a\left(1 - p_0\left(\frac{y}{a}\right)\right)\right) = \hat{G}(y) \end{aligned}$$

となり、これで $\hat{G}(y) = \hat{G}(\phi_{3,2}(y))$ が示されたことになる。

5 予想 1.1 との関係

連続な $\eta : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ で、自然数 k と連続な $G : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ に対し、

$$G(\eta^k(u)) = G(u) \quad (0 \leq u \leq 1) \tag{36}$$

のとき、 G が定数になってしまうような η 全体の集合を $A_c(k)$ 、(36) のときに

$$G(\eta(u)) = G(u) \quad (0 \leq u \leq 1) \tag{37}$$

となる η 全体の集合を $A_1(k)$ 、(36) のときに

$$G(\eta^2(u)) = G(u) \quad (0 \leq u \leq 1) \tag{38}$$

となる η 全体の集合を $A_2(k)$ と書くことにすると、2 節、3 節で見たように、任意の $k \geq 1$ に対し $\phi_0, \phi_1, \phi_2 \in A_c(k)$ であり、(a) の場合の ϕ_3 も任意の $k \geq 1$ に対し $\phi_3 \in A_c(k)$ で、 $0 < a \leq 1/2$ の (b) の場合の ϕ_3 は、 $\phi_3 \in A_1(2k-1)$, $\phi_3 \in A_2(2k)$ となる。

さらに、全単射な連続関数 $\xi: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ に対して、

- $\phi \in A_c(k)$ ならば $\xi \circ \phi \circ \xi^{-1} \in A_c(k)$
- $\phi \in A_1(k)$ ならば $\xi \circ \phi \circ \xi^{-1} \in A_1(k)$
- $\phi \in A_2(k)$ ならば $\xi \circ \phi \circ \xi^{-1} \in A_2(k)$

も言える。

そして、これらによって、予想 1.1 に対して、[2] の命題 5 に相当するものが成り立つ。すなわち次が言える。なお、 ϕ_j, ψ_j , 条件 (H) 等は [2] にあるものと同じ記号を用いることにする。

命題 5.1

$\{\phi_j\}$ が条件 (H) を満たし、 $d = \gcd(n, m)$ に対し、 $\eta = \phi_m \circ \phi_0^{-1}$, d が以下のいずれかを満たす場合は予想 1.1 は正しい。

- $\eta \in A_c(n/d)$ の場合
- $\eta \in A_1(n/d)$ で $d \leq 2$ の場合
- $\eta \in A_2(n/d)$ で $d = 1$ の場合

証明は、下の 2 つは [2] とほぼ同様だが、 $\eta \in A_c(n/d)$ の場合は、 $F(u, v) = F(\eta^{n/d}(u), v)$ から $F(u, v) = \hat{F}(v)$ (u に関して定数) となるので、

$$F(\phi_i(X), \psi_j(Y)) = F(\phi_{i-1}(X), \psi_{j-1}(Y)) = \hat{F}(\psi_{j-1}(Y)) = F(\phi_{i+1}(X), \psi_{j-1}(Y))$$

が成り立つ。

6 最後に

本稿では、前回の報告 [2] 以後にわかった事実として、

- $\eta = \phi_m \circ \phi_0^{-1}$ が単調でない場合でも、特に [2] で言及した ϕ_1 のような場合でも予想 1.1 が正しいこと
- さらにそれを $A_c(k), A_1(k), A_2(k)$ の η に広げることができること
- 単調でなく全射でない ϕ_3 のような関数でも、その多重写像の様子を調べることができ、それに対しても $A_c(k), A_1(k), A_2(k)$ に含まれる場合があること

を紹介した。しかし、まだまだ予想 1.1 の一般的な解決にはまだ相当に遠い。ただし、このような条件を積み上げていくことにより、反例があるとすればどういう形でなければならないか、ということは徐々に狭まってきたように思う。

多分、このような解析的なアプローチではある程度限界があり、位相幾何学的な方面からの研究により解決に近づくのではないかと想像しているのだが、その方面からの研究は、その分野に対する知識不足から全く進んでいない。その考察も今後進めたいと考えている。

参考文献

- [1] 竹野茂治、「2 変数の周期関数に関するある性質について」新潟工科大学紀要, 17, (2012), 13–17.
- [2] 竹野茂治、「2 変数の周期関数に関するある性質について II」新潟工科大学紀要, 20, (2015) 15–22.
- [3] M.W.Hirsch, S.Smale, R.L.Devaney (桐木紳、三波篤郎、谷川清隆、辻井正人訳)、「力学系入門 (原著 第 2 版)」, (2007) 共立出版
- [4] 伊藤清三: ルベーク積分; 裳華房, pp 41–43, 1963.